

O GNÔMON COMO INSTRUMENTO DE DESCOBERTAS GEOMÉTRICAS

Prof^o Ms. Osvaldo dos Santos Barros

cacaueines@ig.com.br

Este trabalho é o resultado das atividades pedagógicas desenvolvidas com estudantes do curso de Licenciatura Plena em Matemática, no município de Altamira – PA, na disciplina Metodologia Específica da Matemática, em junho de 2001, com o propósito de desenvolver metodologias alternativas para o ensino-aprendizado de Geometria no ensino fundamental e médio. Partindo de estudo sobre o Gnômon, aparato usado desde a antiguidade para a determinação dos pontos cardeais, formaram-se duas equipes de trabalho que atuaram em terrenos com diferentes inclinações, com o propósito de fazer descobertas sobre as implicações geométricas, no estudo da sombra projetada do Gnômon e dos movimentos aparentes do sol.

O Gnômon

Na Antiguidade, foram muitas as contribuições dos gregos e romanos para o desenvolvimento da Matemática e da tecnologia. Um exemplo é a utilização do Gnômon que consiste em uma haste vertical, feita em geral de madeira ou pedra que deve ser fixado em um terreno bem horizontal e liso, com o propósito de determinar o posicionamento dos pontos cardeais, além de marcar a passagem do tempo. Nos dias ensolarados, conseguiam saber, a partir da sombra da haste projetada no chão, qual a duração dos períodos matutino e vespertino, separados pelo meio dia solar (quando o Sol está sob a linha imaginária do Meridiano Astronômico do Lugar – MAL).

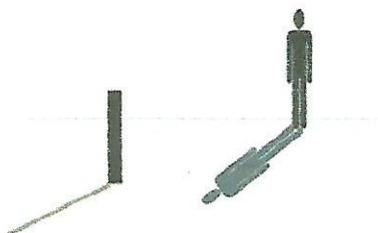


Fig. 1

Para que a haste fique o mais ortogonal (90° - noventa graus) possível em relação ao solo, se usa um fio de prumo (fig. 1). Para que a haste fique o mais ortogonal (90° - noventa graus) possível em relação ao solo, se usa um fio de prumo.

Os índios Tembé-Tenetahara que moram no nordeste do estado do Pará se utilizam desse instrumento basicamente para determinar os pontos cardeais e traçar Kwarahy Kami (caminho do sol), conhecido na astronomia científica como Eclíptica, ligando os lados leste e oeste, sob a qual serão construídas a casa do cacique e a casa de orações, além do enterramento dos mortos que deve seguir as indicações de dispor o morto com a cabeça para o nascente e os pés para o poente.

Determinação das linhas de coordenada e pontos cardeais

O movimento aparente que o Sol descreve no céu, é chamado de Eclíptica. Nele o Sol eleva-se do horizonte leste, pela manhã, até atingir sua altura máxima no meio dia solar. Depois descreve um movimento descendente até que atinge o horizonte oeste.

Ao observarmos o deslocamento do sol durante um dia, podemos perceber claramente as relações de simetria entre sua altura aparente e o tamanho da sombra de um objeto (gnômon). Enquanto que a altura, pela manhã, é ascendente, pela tarde é descendente. Isso nos possibilita introduzir discussões sobre: oposição, simetria e proporções direta e inversas. (fig. 2)

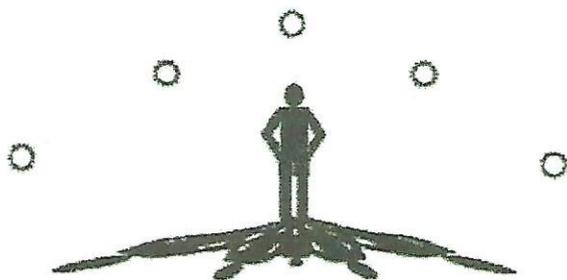


Fig. 2

Os arcos descritos pelo "movimento" da sombra e do sol, são simétricos entre si, a ascendência do sol e a decrescência do tamanho da sombra da haste. A relação entre esses dois entre, a sombra e o sol, é inversamente proporcional.

A Eclíptica é a linha imaginária pela qual desfilam o Sol, os Planetas e a Lua, num movimento ascendente, quando antecedem a passagem pelo Meridiano (Anti-Meridiano-AM) e descendente, após passarem pelo Meridiano (Pós-Meridiano-PM).

Para os Tembés, basta simplesmente observar a sombra, quando o sol está prestes a atingir o meio dia. Nesse instante a sombra deve ser marcada e o ponto de marcação é ligado ao centro da haste. Assim, a linha traçada entre os dois pontos é a linha que liga os pontos cardeais norte e sul, descrevendo a linha imaginária do meridiano do lugar.

Construindo o Gnômon

A partir dessas informações, trabalhamos a disciplina Metodologia Específica da Matemática os estudantes do curso de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Federal do Pará, no Município de Altamira – PA. Formaram-se duas equipes de trabalho, cada uma construiu um gnômon, posicionando-o em terrenos de diferentes inclinações. Uma das equipes trabalhou em um terreno que apresentava grande inclinação (foto 1). Sob essa condição o grupo teria dificuldades que implicariam nos registros da sombra projetada pelo aparato.



Foto O. Barros – julho/2001

Foto 1

Podemos perceber a inclinação do terreno pelo posicionamento do estudante da esquerda. Como conclusão, foi percebido que o funcionamento do gnômon estaria comprometido, haja vista que o tamanho das sombras seriam irregulares. Pela manhã as projeções da sombra, na parte alta, seria ligeiramente menores do que as da tarde, na parte mais baixa do terreno.

Assim, mesmo o terreno sendo liso e a haste esteja apumada, não teríamos garantida a simetria dos registros e por conseguinte, a determinação da linha norte-sul.

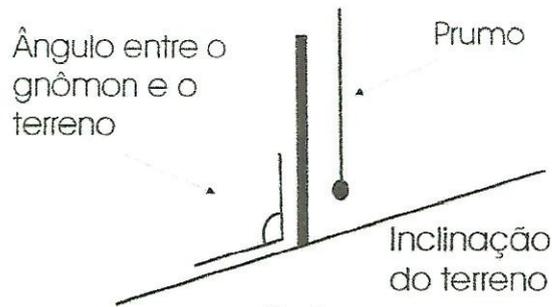


Fig. 3

A partir dessa situação é possível introduzir o conceito de projeção de um ponto sobre uma superfície e estudar o ângulo de inclinação entre essa projeção e a superfície na qual o ponto é projetado.



Foto O. Barros - junho/2001

Foto 2

A segunda equipe, por sua vez, escolheu a quadra de esportes do campus, considerada pelos estudantes, um terreno sem inclinação, portanto, horizontal (foto 2). Nessa busca pelo espaço mais adequado, os estudantes já exercitavam a diferenciação entre plano horizontal e plano inclinado, a partir do simples reconhecimento visual, sem a necessidade de instrumentos específicos como o nível.

Com a ajuda de um fio de prumo (fig. 34), fixaram com facilidade o gnômon e passaram a registrar as variações de tamanho da sombra ao longo da manhã (foto 3).

O paralelismo entre a sombra da haste e o fio de prumo é um dos fatores que garantem a ortogonalidade do Gnômon, em relação ao plano horizontal, o outro fator é o posicionamento da haste em relação ao fio esticado pela massa (pedra amarrada ao fio).



Foto O. Barros - julho/2001

Foto 3

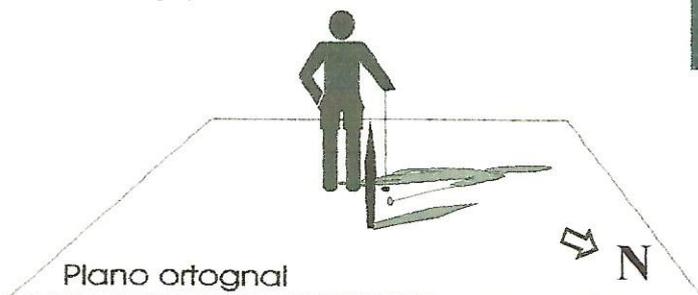


Fig. 4

Com base nos estudos de Caniato (1990), sobre os registros do deslocamento aparente do sol, no decorrer do dia, a partir dos registros da sombra do gnômon, construímos um modelo desse deslocamento, usado para a determinação do Meridiano Astronômico do Lugar (MAL) e a identificação de Kahary Kamy (o caminho do Sol).

Analisando a sombra do gnômon

Iniciamos a análise dos resultados, pelo trabalho da equipe que fixou o gnômon, na quadra de esportes. Foram feitos três registros no anti-meridian e seus simétricos no pós-meridian. Nesse momento de marcação das sombras, os estudantes discutiam sobre quais os conceitos matemáticos que poderiam ser trabalhados com a experiência. Assim, foram pontuados os seguintes tópicos de estudo:

- ◆ *Noção de circunferência:* com o registro da primeira sombra, pela manhã, a necessidade de marcar uma circunferência, trouxe a tona o reconhecimento dos elementos que compõem essa figura: a sombra é o raio, e o centro da circunferência é o local onde se encontra fixa a haste (gnômon). A marcação da circunferência, representa o deslocamento da extremidade da sombra por todo o entorno do centro, ou do Gnômon. Com a proximidade do meio dia, outras marcações produzem circunferências menores, mas com o mesmo centro e que por isso, os pontos de encontro da sombra com as circunferências, depois do meio dia, determinam aberturas angulares iguais (fig 5).

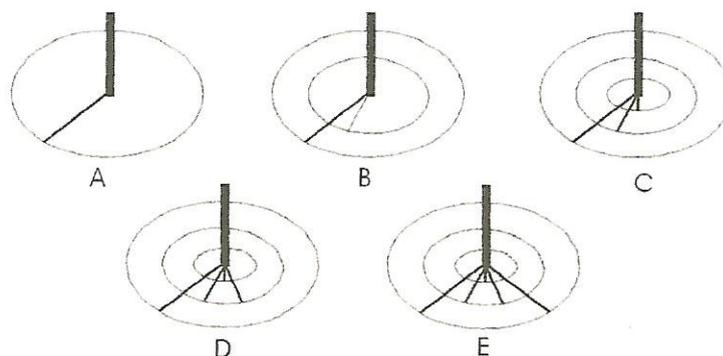
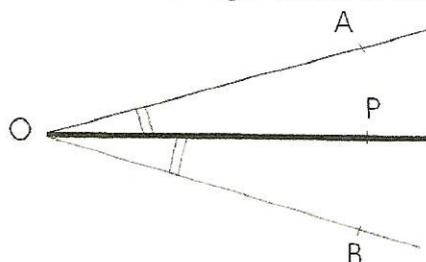


Fig. 5

Na sequência de registro das sombras A e B são anotadas pela manhã (anti-meridian), C corresponde ao momento em que o sol ultrapassa a linha meridional (meio dia solar), D e E são os registros simétricos das anotações da manhã (pós-meridian).

- ◆ *Definição da Bissetriz:* Semi-reta interna de um ângulo, com a origem em seu vértice, e que divide em dois ângulos adjacentes e congruentes. A partir do reconhecimento e da determinação da bissetriz é possível desenvolver operações com os valores correspondentes às aberturas angulares.



OP é bissetriz de $\hat{A}OB$:
 $\hat{A}OP \equiv \hat{POB}$

Sabendo-se que cada parte da abertura pode ser reunida, teremos:

$$\begin{aligned} \widehat{AP} + \widehat{PB} &= \widehat{AB} \\ \widehat{AB} - \widehat{PB} &= \widehat{AP} \\ \widehat{AB} - \widehat{AP} &= \widehat{PB} \\ \widehat{AP} &= \widehat{PB} \\ \widehat{AP} \times 2 &= \widehat{AB} \end{aligned}$$

Observando a seqüência a seguir, podemos compreender o processo de determinação das bissetrizes de cada abertura angular, que se encontram coincidentes sobre a mesma reta suporte.

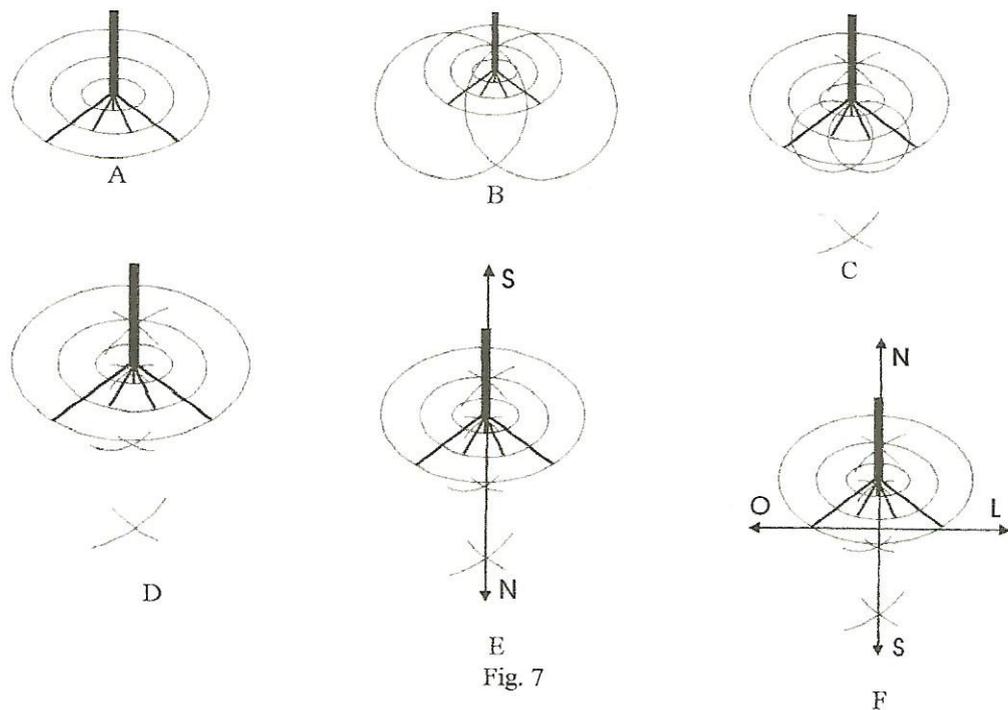


Fig. 7

A seqüência da figura 7 nos dá uma visão da utilização do compasso e da aplicação do conceito de circunferência.

Nas figuras B e C os pontos coincidentes das circunferências geradas a partir da extremidade de cada raio (tamanho da sombra), revelam o posicionamento de pontos sobre uma reta (fig. D e E). a partir dessa situação, podem ser realizados inúmeros exercícios de desenho geométrico (desenho técnico).

- ♦ *A linha meridional como suporte das bissetrizes:* O uso do compasso, nesse processo é fundamental. Com a linha meridional determinada, é possível, por métodos de desenho técnico/geométrico, traçar a linha equatorial, ou leste-oeste, que é ortogonal à meridional.

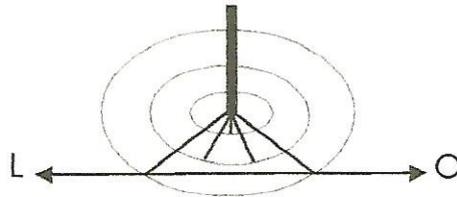
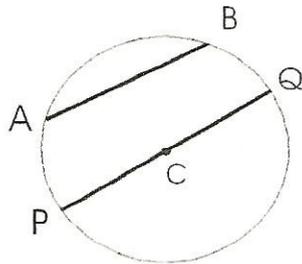


Fig. 8

Os Tembê-Tenetebara usam outro método, mais simples para marcar a linha meridional, muito semelhante ao método de cordas, da matemática ocidental.

- ◆ *Introdução do conceito de corda:* A corda de uma circunferência é um segmento cujas extremidades são pontos da circunferência.



AB e PQ são cordas.
A corda que passa pelo centro é chamada diâmetro.
PQ é diâmetro.

Fig. 9

O corte de corda é muito utilizado na óptica para a construção de lentes convexas.

- ◆ *O uso de instrumentos e conceitos matemáticos:* O compasso, na sua forma mais primitiva (barbante com uma das extremidades centrada em um ponto e a outra se deslocando para formar circunferências) pode ser usado para o reconhecimento do processo histórico de construção do conhecimento matemático e a aplicação de tecnologias (régua, esquadro, entre outros) para este fim. Além dos conceitos matemáticos, outros temas para discussão, referem-se às técnicas e tecnologias utilizadas para a realização de um determinado trabalho, possibilitando um resgate histórico dos instrumentos de orientação, como: a bússola, o sextante, oitante, as cartas celestes e marítimas e mais atualmente, o GPS (sinal gerado por satélite).

Sabendo onde estão localizadas as linhas meridional e equatorial, podemos indicar no horizonte os pontos cardeais, que dividem, por sua vez, o horizonte em quadrantes: Noroeste – entre o norte e o oeste; Sudoeste – entre o sul e o oeste; Sudeste – entre o sul e o leste e Nordeste – entre o norte e o leste. Esses quadrantes, podem ainda ser subdivididos formando oitantes. Esse processo resulta na construção de uma legenda de orientação chamada Rosa dos Ventos, que deve estar presente em todo e qualquer mapa ou planta baixa, pois sem ele não é possível saber qual o posicionamento em relação aos pontos cardeais.

Aprendendo com nossos erros

A equipe que estudava o gnômon fixado em um terreno inclinado, enquanto realizava a tarefa de fixação da haste, discutiu a possibilidade de não dar continuidade à tarefa, optando por pontuar quais as dificuldades que não permitiriam a boa realização da demarcação da linha meridional.

O primeiro ponto de discussão foi a inclinação do terreno, que não permitiria a uniformidade dos registros das projeções de sombra do gnômon. As circunferências construídas obedecem às relações entre a sombra da haste projetada no terreno e o deslocamento aparente do sol (haja vista que deveriam ser construídas circunferências a partir das sombras e a inclinação do terreno, em relação à linha do deslocamento do sol (fig. 10). Pela manhã, o sol (ponto A) projeta uma sombra, que a partir do seu tamanho, é marcada a 1ª circunferência. Contudo, para que a sombra alcance a borda dessa circunferência, pela tarde, o sol na posição B, não se encontraria no ponto de simetria (ponto C), o que ocasionará erros na determinação das aberturas angulares e conseqüentemente, a marcação incorreta da linha meridional.

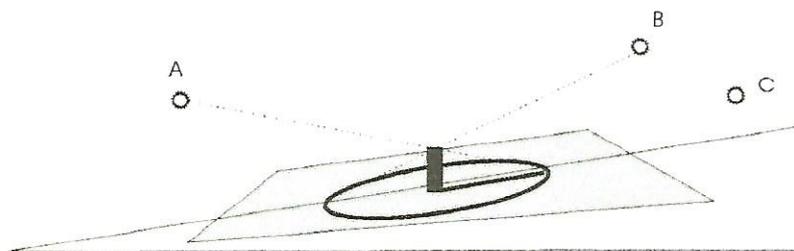


Fig. 10

A partir da análise da situação, podemos introduzir o conceito de projeção de um ponto sobre uma superfície qualquer, conceituando também as medidas angulares: ortogonal (ângulo reto), acutângulo (menor que ângulo reto) e obtusângulo (maior que o ângulo reto) (fig. 11).

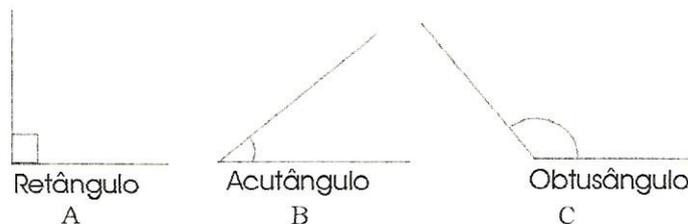


Fig. 11

A compreensão do conceito de projeção se dá a partir do entendimento das forças físicas que atuam sobre o fio de prumo: Força peso (massa e aceleração da gravidade). O fio, esticado na direção da superfície do terreno, devido a ação da gravidade sobre o lastro (corpo preso na extremidade do fio), representa a projeção de um ponto sobre essa superfície. Em superfície plana, teremos a projeção em um ângulo reto (retângulo) (fig 12-A), para terrenos inclinados a incidência da projeção pode ser interpretada de duas maneiras: Acutângular em relação ao ponto mais alto do terreno ou Obtusangular, em relação ao ponto mais baixo (fig. 12-B).

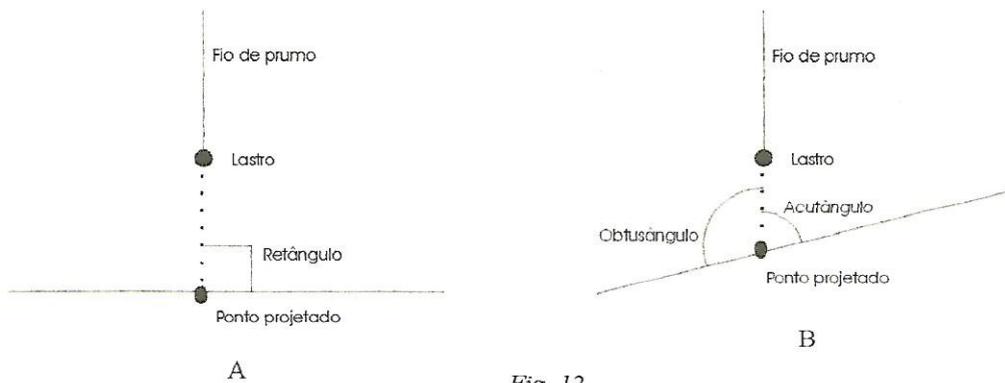


Fig. 12

A força peso que atua sobre a massa do fio de prumo forma um ângulo de incidência com a superfície, significada matematicamente pela projeção de um ponto em uma superfície qualquer. Essa projeção não significa, necessariamente, uma incidência ortogonal.

Nessa mesma situação, iniciamos a discussão sobre paralelismo, haja vista que a função do prumo, que é a de aferir a posição ortogonal da haste, só pode ser cumprida a partir do paralelismo das sombras desses dois instrumentos (fig 13).

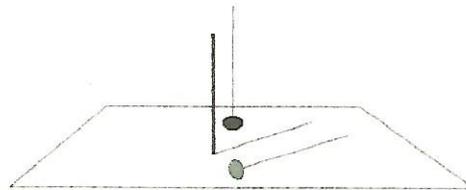


Fig. 13

Na perspectiva de discutir os motivos que dificultaram a realização de uma tarefa, como foi feito pela equipe que trabalhou com o gnômon no terreno inclinado, é possível, também, fazer um resgate histórico dos processos de construção de instrumentos e técnicas, a partir do método a descoberta, valorizando o processo de tentativa e erro, que fazer parte da história da própria ciência. Descobrir, por exemplo, que a tecnologia, tão presente em nosso cotidiano, não resulta de uma ação natural, nem tampouco divina, mas do espírito investigativo e da necessidade de superação das adversidades encontradas pela humanidade no seu caminho de luta pela melhoria da qualidade de vida.

No aprofundamento do estudo dos planos inclinados e horizontais, uma possibilidade é a discussão sobre a necessidade de horizontalizar os espaços, cujos terrenos apresentam inclinações, seja pelo uso de palafitas (fig 14-A) ou pela retirada de excedentes (fig 14-B).

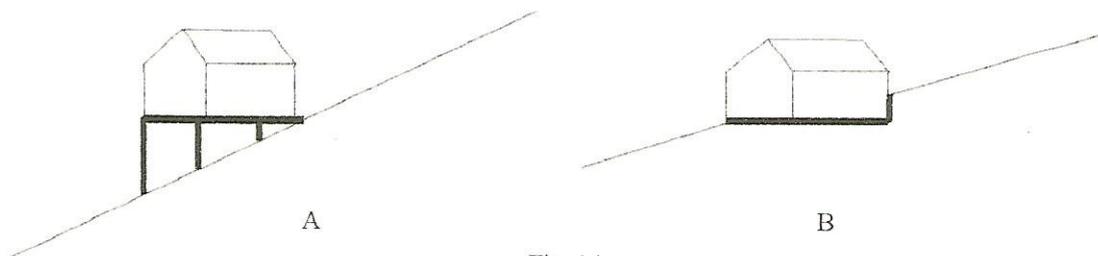


Fig. 14

Nesse processo de descobertas, podem-se, também, discutir questões referentes à especulação imobiliária e a ocupação de morros nas grandes cidades, caracterizada pela densidade demográfica que ocasiona o aparecimento de favelas, onde são comuns as construções em planos inclinados.

Considerações Finais

A partir das situações experimentadas, os estudantes do curso de matemática, futuros professores, oportunizaram a aplicação dos seus conhecimentos matemáticos, dando outras dimensões ao rigor matemático, priorizando o significado resultante das soluções dos problemas.

A construção/orientação desses Trabalhos foram determinantes para que pudéssemos melhor compreender que uma das principais barreiras que distanciam os estudantes dos conteúdos matemáticos, refere-se aos critérios disciplinares muito rígidos, aplicados ao estudo dessa ciência, o que impossibilita professores e estudantes de encontrarem estratégias diferenciadas de ensino-aprendizagem da matemática escolar. Entendemos, porém, que não basta uma renovação metodológica, torna-se cada vez mais necessário compreendermos que

[e]nsinar é um ato coletivo: pode-se ensinar a um grande número de pessoas presentes numa aula ou numa conferência, etc. Quem ensina procura transmitir informações que julga relevantes, organizadas do modo que lhe parece mais razoável, para que seus ouvintes aprendam algo que deseja transmitir.

Aprender é um ato individual: cada um aprende segundo seu próprio metabolismo intelectual. A aprendizagem não se processa paralelamente ao ensino. O que é importante para quem ensina pode não parecer tão importante para quem aprende. A ordem da aprendizagem é criada pelo indivíduo, de acordo com sua história de vida e, raramente, acompanha passo a passo a ordem do ensino. (CAGLIARI, 1999,p.36).

O conhecimento matemático, sob uma nova óptica do ensinar e do aprender, reflete as relações sistêmicas entre homem e meio, em suas múltiplas possibilidades: extrativista, de mutualidade, auto-sustentável entre outras, e nas relações intra-interpessoais, proporciona, também, diferentes leituras e interpretações dos fenômenos naturais, seja pelo uso de técnicas e/ou tecnologia específicas, ou pela introdução/desenvolvimento de códigos de linguagem e seus processos de codificação.

O empenho desses futuros professores na busca da compreensão dos processo de construção de soluções matemáticas, promoveu reflexões sobre as limitações de educandos e educadores, sensibilizando-os quanto às necessidades de considerar suas crenças, suas incertezas e suas formas singulares de ver o mundo e de interferir na realidade.

Bibliografia Consultada

- ACZEL, Amir D. Bússula. A invenção que mudou o mundo. Rio de Janeiro, Zahar, 2002.
- BARROS, Osvaldo Santos. Astronomia indígena dos Tembé-Tenetebara, col. Introdução à Etnomatemática, Editor Geral Bernadete Barbosa Morey, Natal, RN, 2004.
- CAGLIARI, Luis Carlos. Alfabetização sem o Ba, be, Bi, Bo, Bu. Scipione, São Paulo, 1999.
- CANIATO, Rodolfo. O Céu. São Paulo, Ática, 1990.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: da Teoria à Prática. Campinas, Papirus, 1996.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. ETNOMATEMÁTICA: Arte ou técnica de Explicar e Conhecer. São Paulo, Ática, 1990.
- GALVÃO, Eduardo. Diário de Campo, Rio de Janeiro. Museu do Índio / FUNAI, 1996.
- MAGALHÃES, Lázaro JR. (et al.). O Céu do Índios Tembé, 2. Ed., Belém, IOE, 2000.