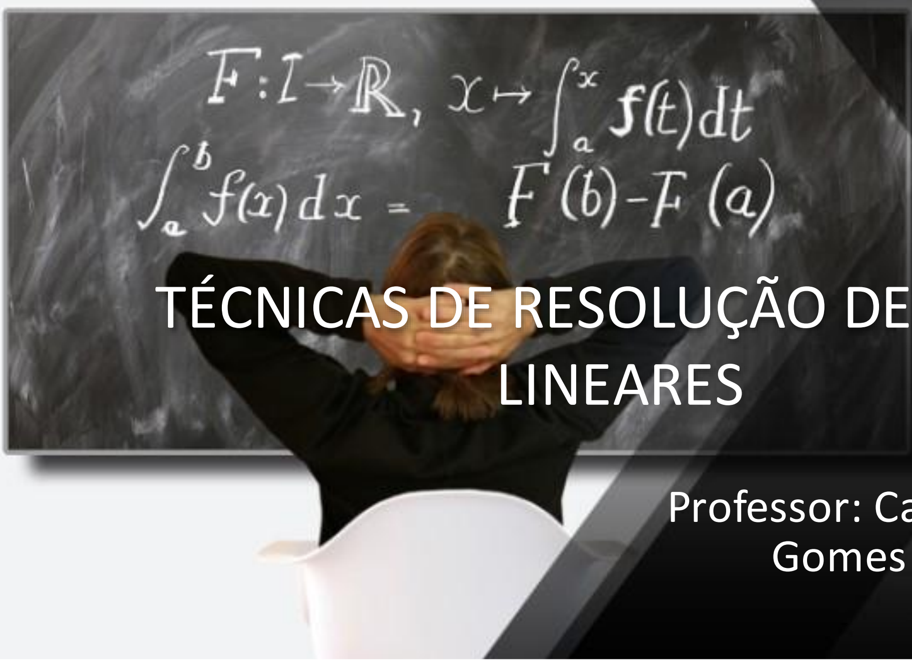
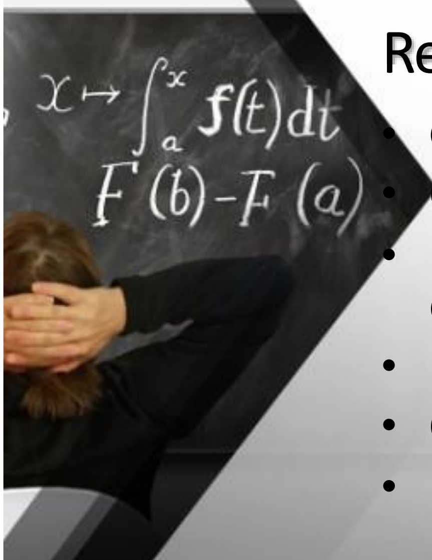


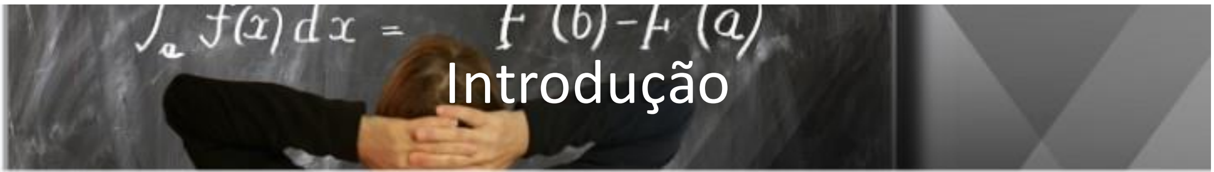
TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE EDO'S LINEARES

Professor: Carlos Rogério Gomes Cabral



Resumo do Perfil Profissional

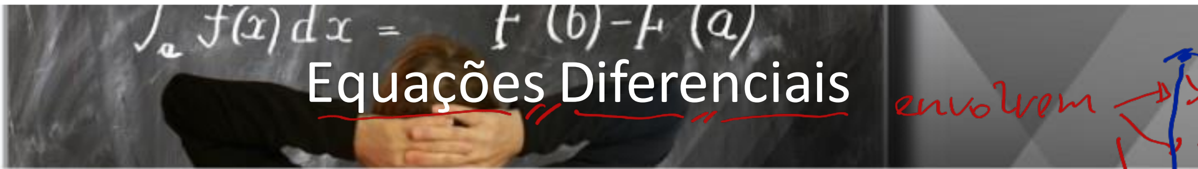
- Graduação em Matemática - UEPA
- Cursando Física – UFPA
- Especialista em Ensino de Física e Ensino de Matemática - INTERVALE
- Mestre em Física – UNIFESSPA
- Concursado SEMED Canaã dos Carajás
- Professor substituto do IFPA campus Parauapebas



Introdução

Se desejarmos resolver um problema de engenharia (usualmente de natureza física), temos primeiro que formular esse problema como uma expressão matemática, em termos de variáveis, funções, equações etc. Uma expressão desse tipo é então chamada de um modelo matemático do problema em questão.

O modelo matemático será na maioria das vezes representado equação diferencial. Muitos problemas importantes da engenharia, da física, da biologia e das ciências sociais são formulados por equações que envolvem esse tipo de equação.



Equações Diferenciais

envolvem → $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$

Equações diferenciais podem ser **ordinárias** ou **parciais**.

- Seja uma função $y = y(x)$ e $y' = \frac{dy}{dx}$. São exemplos de EDO:

EDO de 1ª ordem → $y' + \cos(x) = 0$

EDO de 2ª ordem $y'' + xy = e^x$

$y(x)$

$y'(x)$

Ordinaria → função única → Variavel

- Seja uma função $u = u(x, y)$. Um exemplo de EDP é a *equação de Laplace*

∂ → derivada parcial → Parcial → função de varias → Variaveis

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

Formas de EDO de 1ª ordem

- Forma padrão de uma EDO de 1ª ordem:

$$y' = f(x, y)$$

Forma Padrão

Exemplo: $\boxed{y' = y - \cos(x)}$

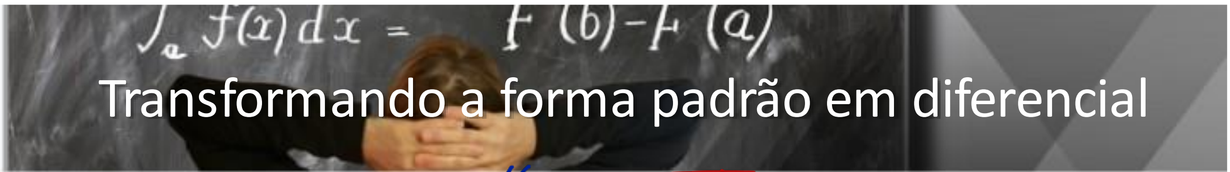
- Forma diferencial de uma EDO de 1ª ordem:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \rightarrow$$

diferencial total.

Exemplo: $\boxed{[\cos(x) - y]dx + dy = 0}$

forma diferencial



Transformando a forma padrão em diferencial

$$y' = y - \cos(x) \longrightarrow \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (y - \cos(x)) \longrightarrow dy = (y - \cos(x)).dx$$

$$dy - (y - \cos(x))dx = 0$$

$$dy + (\cos(x) - y)\,dx = 0$$

$$[\cos(x) - y]dx + 1.dy = 0$$

$N(x,y)$

$$\begin{cases} M(x,y) = \cos(x) - y \\ N(x,y) = 1 \end{cases}$$

Classificações de EDO de 1ª ordem

- Equações lineares: $\to y^n \to \boxed{n=1}$

$$y' + p(x)\,y = q(x) \qquad n \in \mathbb{R}$$

Exemplo: $y' - x^2 y = \boxed{-\cos(x)}$

$n = 1$

- Equações de Bernoulli:

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n\,, \qquad n \in \mathbb{R}$$

Exemplo: $y' - y = e^x y^2$

Classificações de EDO de 1ª ordem

- Equações separáveis: Considere a forma de uma equação diferencial de primeira ordem:

$A(x)$ $\quad$ $B(y)$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Se M(x,y) = A(x) e N(x,y) = B(y), Então a EDO é dita separável.

Exemplo: $\operatorname{sen}(x)\,dx + e^y\,dy = 0$

$A(x) = \operatorname{sen}(x)$

$B(y) = e^y$

- Equações exatas: A EDO de 1ª ordem na forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \to$$

É dita exata se $\boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}}$ Cálculo 2.

EDO’s de 1ª Ordem Separáveis

- Equações separáveis:

Considere a forma diferencial de uma EDO de 1ª ordem

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Se $M(x,y) = A(x)$ e $N(x,y) = B(y)$, a EDO é dita separável.

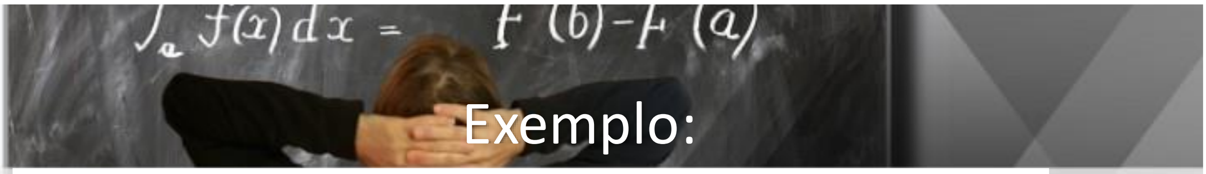
Técnica de resolução

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\begin{cases} M(x,y) = A(x) \\ N(x,y) = B(y) \end{cases}$$

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$$

$$\int B(y)\,dy = -\int A(x)\,dx \rightarrow \text{Integral}$$

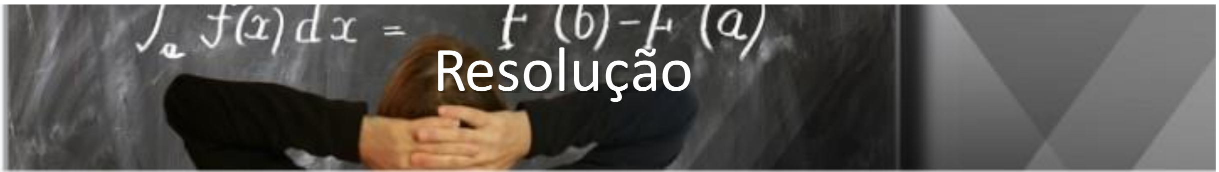


Exemplo:

- Resolva a seguinte EDO de 1ª ordem separável:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$$

sujeita à condição inicial $\boxed{y(1) = 1.}$



Resolução

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2-y)$$

$$dy = \frac{1}{x}(2-y)\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{x} \\ B(x) &= \frac{1}{2-y} \end{aligned}}$$

$$\frac{dy}{2-y} = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$1 \cdot \frac{dy}{2-y} = 1 \cdot \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{dy}{2-y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int -\frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$u = 2-y$

$du = -dy \rightarrow dy = -du$

$$-\left[\ln(u) + C_1\right] = \ln(x) + C_2$$

$$-\ln(2-y) - C_1 = \ln(x) + C_2$$

$$C$$

$$-\ln(2-y) = \ln(x) + \boxed{C_2 + C_1}$$

$$-\ln(2-y) = \ln(x) + C \quad (-1)$$

$$\ln(2-y) = -\ln(x) - C \qquad e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$e^{\ln(2-y)} = e^{-\ln(x) - C} \qquad -\ln(x)$$

$$2-y = e^{-C} \cdot e^{-\ln(x)} \qquad -1 \cdot \ln(x)$$

$$\ln(x^{-1})$$

$$\tilde{C}$$

$$2-y = e^{-C} \cdot \cancel{e}^{\cancel{\ln}\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2 - y = \tilde{C} \cdot \frac{1}{x}$$

$$-y = \frac{\tilde{C}}{x} - 2 \quad (-1)$$

$$y = -\frac{\tilde{C}}{x} + 2$$ Solução Geral.

Condição inicial $\rightarrow y(1) = 1$

$$y = -\frac{\tilde{C}}{x} + 2$$

$$1$$

$$-\tilde{C} = 1 - 2$$

$$-\tilde{C} = -1 \quad (-1)$$

$$1 = -\frac{\tilde{C}}{1} + 2$$

$$\boxed{\tilde{C} = 1}$$

$$y = -\frac{1}{x} + 2$$ $\rightarrow$ Solução particular.

Aplicação - 2ª lei de Newton

- Vamos considerar o movimento de uma partícula sob força constante (MRUV)

F

$$F = ma = m\frac{dv(t)}{dt}.$$

$$\boxed{a = \frac{dv(t)}{dt}}$$

Determine a velocidade em função do tempo sujeita à condição inicial $v(0) = v_0$, com v_0 sendo a velocidade inicial.

- Considerando o item anterior e sabendo que

$$v(t) = \boxed{\frac{dx(t)}{dt}},$$

$s = x$

determine a posição da partícula em função tempo sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$, com x_0 sendo a posição inicial.

Resolução

Força constante. F

$$\boxed{a = \frac{dv(t)}{dt}}$$

$$F = m \cdot a$$

OBS:

$F \to$ constante

$m \to$ constante

$\frac{F}{m} \to$ constante

$$\boxed{a = \frac{F}{m}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

$$\int dv = \int \frac{F}{m} dt$$

$$v = \frac{F}{m} \int dt$$

$$v = \frac{F}{m} \cdot t + C$$

$$v = \frac{F}{m} t + C$$

Solução Geral

$v = a.t + C$ ou $x = C + at$

Condição inicial $\to$ $v(0) = v_0$

$$v = \frac{F}{m} t + C$$

$$v_0 = \cancel{\frac{F}{m} \cdot 0} + C$$

$$\boxed{C = v_0}$$

$$v = \frac{F}{m} \cdot t + v_0$$

$\to$ Solução Particular

$v = a.t + v_0 \to v = v_0 + at$

$$v = \frac{F}{m} \cdot t + v_0 \longrightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} \cdot t + v_0$$

constante constante.

$$\int dx = \int \left(\frac{F}{m} \cdot t + v_0 \right) . dt$$

$$x = \int \left(\frac{F}{m} \cdot t \, dt + v_0 \, dt \right)$$

$$x = \int \frac{F}{m} t \, dt + \int v_0 \, dt$$

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$x = \frac{F}{m} \int t \, dt + v_0 \int dt$$

$$x = \frac{F}{m} \cdot \frac{t^{1+1}}{1+1} + v_0 \cdot t + C$$

$$\boxed{x = \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 t + C} \rightarrow \text{Solução Geral}$$

Condição inicial $\rightarrow x(\overset{t}{0}) = x_0$

$$x(t) = \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 t + C$$

$$x_0 = \frac{F}{m} \cdot \cancel{\frac{0^2}{2}}^{\,0} + \cancel{v_0 \cdot 0}^{\,0} + C \rightarrow \boxed{C = x_0}$$

$$x = \overset{a}{\frac{F}{m}} \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \rightarrow x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

ou

Solução particular. $\rightarrow \boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$

2ª Lei de Newton

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

$v = v_0 + at$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{a \cdot t^2}{2}$

Equações de Movimento.