

# Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática

Oswaldo dos Santos Barros

osbcacau@hotmail.com.br

---

## Resumo

Nesse trabalho, vamos apresenta algumas características dos processos de modelagem matemática e suas possíveis aplicações ao ensino-aprendigem da matemática escolar, além de exemplificar um processo de modelação de uma situação real baseado na prática tradicional dos agricultores sediados nos loteamentos agrícolas da Transamazônica, no Pará, denominados cubagem de terra e de madeira.

## O que é modelagem?

A reestruturação dos processos de ensino-aprendizagem da matemática escolar vem promovendo profundas mudanças no fazer pedagógico dos professores que atuam nos diferentes níveis de ensino, do fundamental ao superior. Assim, a partir da década de 1960, os movimentos de ensino da matemática: Educação matemática e matemática aplicada passaram a dar maior ênfase à compreensão e representação matemática de uma realidade vivenciada por educadores e educandos.

Surgiram, então, grupos de estudo que passaram a elaborar estratégias metodológicas que visam aproximar os conteúdos matemáticos e o cotidiano. A partir desse período, passou-se a organizar tais proposições em grupos de tendências, assim discriminadas: Etnomatemática, voltada à leitura das relações entre cultura e matemática, o uso da História da Matemática como elemento de ensino-aprendizagem, a Modelagem matemática e a aplicação da linguagem matemática à construção de modelos representativos da realidade, a resolução de problemas contextualizados, o uso das tecnologias no ensino da matemática e o estudo do desenvolvimento da cognição por meio da compreensão e aplicação de conceitos matemáticos.

Nesse trabalho estaremos nos detendo ao estudo da modelagem matemática que para Bassanezi (2002),

[...] em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seus usuários na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda o indivíduo para assumir um papel de cidadão. (BASSANEZI, p. 17, 2002).

A modelagem é, também, uma ação interdisciplinar que incorpora os conhecimentos de outras áreas das ciências que podem auxiliar na compreensão e interferência de uma situação.

A superação de questionamentos como: para que serve a matemática? Precisamos de que matemática para realizar nossas atividades? São superadas com a

aplicação prática de conceitos de aritmética, álgebra e geometria, utilizados como ferramentas à resolução de problemas originados na realidade.

Essa nova forma de encarar a matemática vem contribuir, também, para a construção de uma prática pedagógica que combine “jogos” e resultados práticos, superando situações de definição arbitrária dos conceitos matemáticos.

### Considerações sobre modelagem

Com o advento das ciências, o conhecimento dito empírico passou a ser reestruturado, a partir do método científico, sendo condicionado às leis da ciência e complexos organogramas de causa e efeito e extensas representações estatísticas descritas em gráficos e tabelas. Nesse processo, a matemática passou a assumir um papel fundamental e quase dogmático de validação ou não de um dado conhecimento da realidade.

A unificação e esclarecimento de toda ciência ou de todo conhecimento foi preconizado pelo *Método da Razão*, vislumbrado no sonho de Descartes e transmitido no seu célebre “Discurso sobre o método de bem conduzir a razão na busca da verdade”.

A busca do conhecimento científico, em qualquer campo, deve consistir, essencialmente, em:

1. aceitar somente aquilo que seja tão claro em nossa mente, que exclua qualquer dúvida;
2. dividir os grandes problemas em problemas menores;
3. argumentar, partindo do simples para o complexo; e
4. verificar o resultado final. (BASSANESI, p. 18, 2002)

O reconhecimento de uma teoria científica passou a ter como condição necessária, sua representação e análise matemática. Isso fez com que a própria matemática tivesse uma evolução substancial, em decorrência, também, da ampla demanda de aplicação desses conhecimentos à outras áreas das ciências.

Entre as ciências naturais como a física, a astrofísica e a química, as relações com a linguagem matemática sempre foi ambiente comum. Porém, outras áreas como a biológica, atualmente usam de muitos conceitos matemáticos para descrever o crescimento populacional de algumas espécies de bactérias, por exemplo, ou o metabolismo de seres e suas relações com o meio ambiente. Nas ciências sociais, a matemática vem ganhando espaço, também na descrição dos equilíbrios de mercado e da economia, nos fenômenos sociais, entre outros.

A modelagem matemática, contudo, possui limites como todas as áreas, o que promove a busca por novas estruturas de significação das suas aplicações, assim como da leitura dos seus resultados.



## Modelagem e Modelo Matemático

A composição da representação de uma porção da realidade, seja para explicá-la ou entendê-la, ou agir sobre ela, é um processo que demanda o agrupamento de argumentos e parâmetros a serem considerados na formalização do modelo, que é, antes de tudo, um sistema artificial, dessa realidade.

Para entendermos a dinâmica dos argumentos que implicam nessa construção, vamos estudar dois modelos: o modelo objeto e o modelo teórico.

**Modelo Objeto:** é a representação de um objeto ou fato concreto. Tem como característica a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser: *Pictórica* (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.); *Conceitual* (fórmula matemática) ou *Simbólica*. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e detalhes do fenômeno ou objeto estudado

**Modelo Teórico:** Está vinculado a uma teoria geral já existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características do sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).

Nesse contexto, o modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o objeto estudado. Ele deve ter uma linguagem que possa expressar idéias de forma clara e sem ambigüidades proporcionando o maior número possível de informações que possibilitem o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas.

## Modelos matemáticos

Os modelos matemáticos são classificados de acordo com o tipo de matemática utilizada.

1. Linear ou não-linear, conforme suas equações tenham essas características;
2. Estático, quando representa a forma do objeto, ou Dinâmico, quando simula variações do estágio de um fenômeno.
3. Educacional, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições tendo, quase sempre, soluções analíticas (envolve a investigação de uma ou duas variáveis isoladas da complexidade do fenômeno); Aplicativo, é aquele baseado em hipóteses realísticas e, geralmente, envolve a interação de um grande número de variáveis fornecendo, em geral, um sistema de equações com numerosos parâmetros.



## Processos de modelagem de uma situação real

A modelagem matemática é muito eficiente a partir do momento que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com *Aproximações* da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre um sistema ou parte dele.

A modelagem matemática de uma situação ou problema real deve seguir uma seqüência de etapas, simplificada como descrito a seguir:

- 1- Experimentação: é uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Implica na adoção de métodos estatísticos para dar confiabilidade nos resultados obtidos, elaboração de equações que facilitem o cálculo matemático e a elaboração de um foco que permita melhor visibilidade das variáveis envolvidas no fenômeno.
- 2- Abstração: é o processo que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nessa fase procura-se estabelecer:
  - a) Seleção de variáveis - a distinção entre variáveis de estado que descrevem a evolução do sistema e as variáveis de controle que agem sobre o sistema;
  - b) Problematização ou formulação aos problemas teóricos de uma linguagem, própria da área em que se está trabalhando;
  - c) Formulação de hipóteses – as hipóteses dirigem a investigação e são comumente formulações gerais que permitem ao pesquisador deduzir manifestações empíricas específicas. A hipótese deve incorporar parte da teoria que podem ser testadas e desta forma constituem investimentos poderosos para o avanço da ciência.
  - d) Simplificação – os fenômenos que se apresentam para o estudo matemático são, em geral, excessivamente complexos se os considerarmos em todos os seus detalhes. Não são raras as situações em que o modelo dá origem a um problema matemático que não apresenta a mínima possibilidade de estudo devido a sua complexidade. Neste caso, a atitude será a de voltar ao problema original e tentar restringir as informações incorporadas ao modelo a um modelo que não desfigure irremediavelmente o problema original, mas que resulte em um problema matemático tratável.
- 3- Resolução: o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática corrente – e como num dicionário, a linguagem matemática admite “sinônimos” que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural. A resolução de modelos é uma atividade própria do matemático, podendo ser completamente desvinculada da realidade modelada.
- 4- Validação: é o processo aceitação do modelo proposto – Nesta etapa os modelos juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real – o grau de aproximação dessas previsões será o fator preponderante para a sua validação.



5- Modificação: Alguns modelos podem não ser aceitos e conseqüentemente não levarem a obtenção de resultados previstos, o que pode ocorrer sob as seguintes condições:

- algumas hipótese usada pode ser falsa ou não suficientemente próxima da verdade;
- alguns dados experimentais ou informações podem ter sido obtidos de maneira incorreta;
- a hipótese e os dados são verdadeiros mas insuficientes, e nossa intuição da realidade é inadequada;
- Existem outras variáveis na situação real que não foram utilizadas no modelo teórico;
- Foi cometido algum erro no desenvolvimento matemático formal;
- Um novo dado ou variável foi descoberto.

O aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Nenhum modelo deve ser considerado definitivo e o processo de modelagem deve considerar que:

- Os fatos conduzem constantemente a novas situações;
- Qualquer teoria é passível de modificações;
- As observações são acumuladas gradualmente de modo que novos fatos suscitam novos conhecimentos;
- A própria evolução da matemática fornece novas ferramentas para traduzir a realidade.

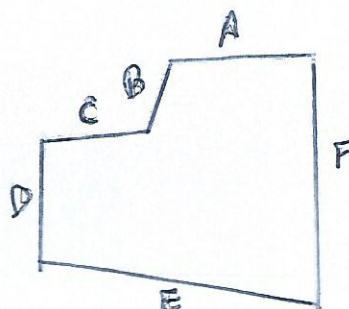
A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.

## Modelos matemáticos alternativos

### Cubagem da Terra

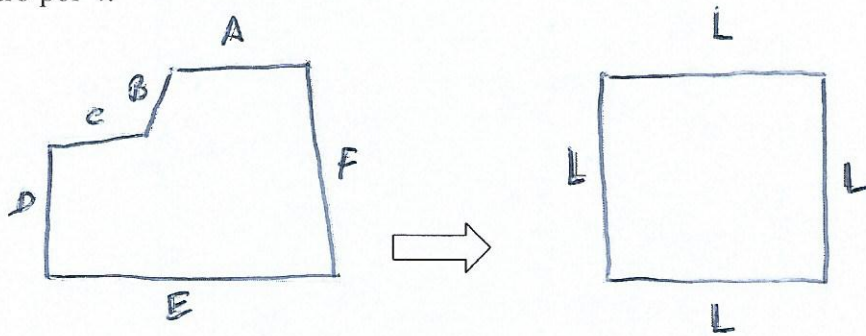
Outra proposta de atividade que utiliza como base de dialogo as relações entre a matemática e as ações cotidianas, apresentamos a Cubagem da Terra, que é uma técnica de demarcação de áreas, muito comum na zona rural, correspondendo a um modelo de transfiguração de uma área qualquer, para o formato de um quadrado.

Sabendo-se as medidas laterais da área a ser medida podemos determinar o perímetro.



$$P = A + B + C + D + E$$

Para que a área a ser determinada assumira a forma de um quadrado, basta dividir o perímetro por 4.



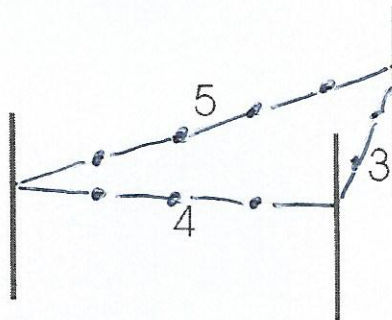
A partir da cubagem de uma área a ser trabalhada, é possível determinar qual a quantidade de matéria prima necessária à produção: sementes, adubos, inseticida, entre outros. Esse cálculo também é muito útil na determinação do valor da propriedade e no manejo de áreas de floresta.

Um exercício dessa atividade pode ser a determinação da área de espaços não regulares, no qual alunos determinam o valor da medida de cada lado da figura e em seguida realizam a cubagem.

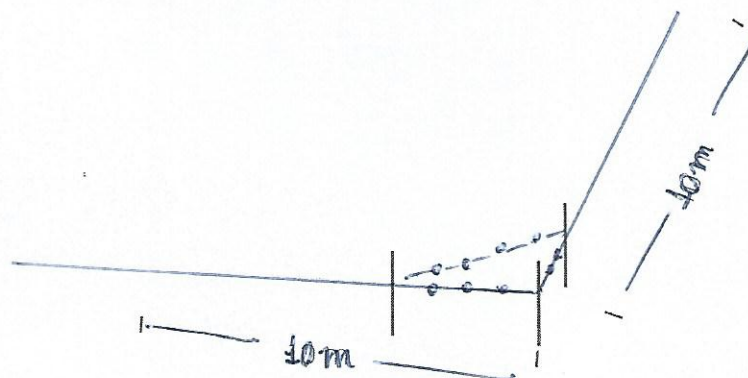
### Usando o triângulo três, quatro, cinco

A partir da utilização do triângulo retângulo podemos demarcar quadra (espaços em forma de quadrado) para um melhor aproveitamento dos espaços.

Usando um barbante, vamos dividi-lo em 12 partes iguais separando cada parte por um nó. Assim teremos 12 unidades de uma medida qualquer.

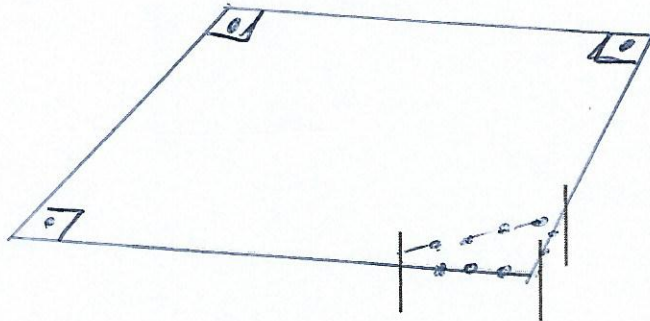


A partir do vértice do triângulo retângulo, para cada lado adjacente ao vértice, medimos o lado da quadra (figura 24).

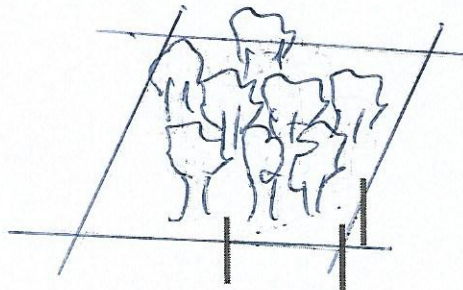




Repetindo-se o processo de construção do triângulo, em cada extremidade dos lados que foram construídos, podemos determinar um ponto de encontro que será o vértice oposto ao primeiro triângulo, concluindo, assim, a quadra desejada.



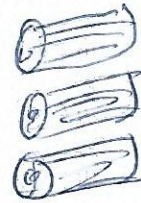
Um exemplo de aplicação desse processo de demarcação pode ser a densidade dos recursos madeireiros de uma determinada área de manejo, por exemplo.



Valor de 1 árvore  
Venda por alqueire  
R\$ 2,00 a R\$ 6,00

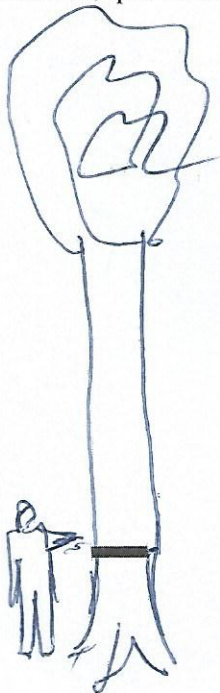


Valor de 1 árvore  
Venda por árvore em pé  
R\$ 10,00 a R\$ 25,00



Valor de 1 árvore  
Venda por alqueire  
R\$ 20,00 a R\$ 45,00

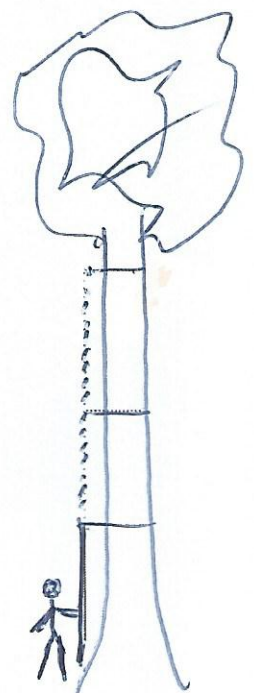
Nesse processo, alguns conceitos matemáticos são trabalhados de forma prática, como acontecem no fazer do homem da floresta. Um desses conceitos é o metro cúbico de madeira, que também é chamado, cubagem de madeira.



RODO

O RODO é a medida de uma volta em torno do tronco, a altura do peito de um homem adulto. Em uma situação de manejo, são consideradas as árvores “maduras” (apropriadas para derrubada e beneficiamento) as árvores que possuem pelo menos 180 cm de rodo.

Outro valor associada a determinação do metro cúbico de madeira é a altura que é medida a partir de uma vara de 4 m até a parte anterior de ramificação do tronco.



ALTURA

Utilizando o rodo e a altura, chegamos a seguinte equação:

$$V = \text{Rodo} \times \text{Rodo} \times \text{ALTURA} \times 0,06$$

*0,06 é um valor de conversão pois o tronco da árvore torna-se mais fino quanto mais próximo da copa (galhada).*

Como atividade complementar podem ser estudados os volumes de figuras regulares como o cilindro, o cone e a esfera. O uso de fita métrica, calculadora e outros recursos menos convencionais de medição (palmo, braça, passo, entre outros) também tornam as atividades bastante movimentadas e interessantes.

#### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A partir das informações apresentadas sobre o processo de cubagem de terra e madeira, vamos aplicar suas propriedades, usando dados levantados das nossas experiências no dia-a-dia, adotando os seguintes procedimentos:

- 1- Formar grupos de trabalho, onde serão discutidas as principais atividades econômicas realizadas na região;
- 2- Identificar as principais unidades de medida: peso, volume, distâncias, etc.
- 3- Comparar as medidas registradas com o sistema métrico decimal, estudado no início desse trabalho;
- 4- Registrar os nomes das unidades e das atividades econômicas desenvolvidas na região, para a formação de um glossário de moedas e unidades;
- 5- Fazer a medição de um determinado espaço utilizando as técnicas apresentadas e fazer o levantamento da área disponível para cubagem de terra e madeira.

---

#### Bibliografia

**RODINEY**, Carlos Bassanezi. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Contexto. São Paulo. 2002.