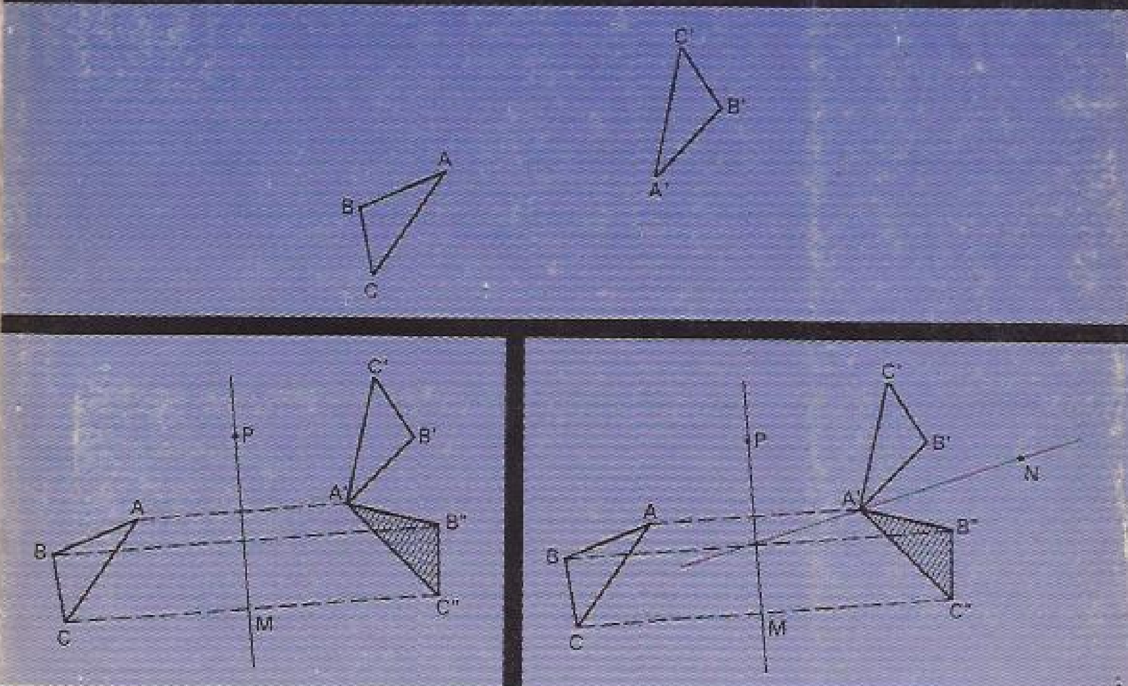
AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E O ENSINO DA GEOMETRIA

volume I



Martha Maria de Souza Dantas ▲ Eliana Costa Nogueira ▼ Neide Clotilde de Pinho e Souza
Eunice da Conceição Guimarães ▲ Omar Catunda

EDUFBA

Este livro foi escrito como texto para o estudo da geometria na 7ª série do primeiro grau. Nele, utilizando as transformações geométricas, procura-se reapresentar a geometria euclidiana de maneira dinâmica; as demonstrações são apresentadas de modo intuitivo e informal, sem perder o rigor.

Os autores desejam que os textos redigidos em linguagem acessível ao aluno, provoquem, ao máximo, a sua atividade pessoal.

Os conteúdos são apresentados através de "unidades de trabalho" chamadas "fichas" onde, em geral, se procura levar o aluno a redescobrir os conceitos a serem estudados.

As fichas já foram testadas com êxito em colégios da rede pública do Estado da Bahia bem como em colégios particulares.

Este volume 1 resulta de uma revisão na qual foram levadas em consideração sugestões construtivas de professores e alunos.

Se através destes textos o aluno sentir-se motivado a estudar geometria, o esforço para ajudá-lo estará recompensado.

EDUFBA

ISBN 85-232-0157-2

Projeto gráfico, capa e desenhos: Angela Garcia Rosa
Digitação e formatação: Rita de Cássia Santos Souza
Revisão: das autoras

T772 As transformações geométricas e o ensino / Martha Maria de Souza Dantas... [et al.]. – Salvador : EDUFBA, 1996.

2v.:il.

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Transformações (Matemática). I. Dantas, Martha Maria de Souza. II. Nogueira, Eliana Costa. III. Souza, Neide Clotilde de Pinho e. IV. Guimarães, Eunice da Conceição. V. Catunda, Omar. VI. Universidade Federal da Bahia. Editora.

CDU - 513(075.3)

Biblioteca Central da UFBA

EDUFBA

Editora da Universidade Federal da Bahia
Rua Augusto Viana, 37 - Canela
CEP: 40110-060 - Salvador - BA
Tel.: (071)245-9564/ Fax: (071)235-8991
Internet (E-Mail):edufba@ufba.br
Atendemos pelo reembolso postal

APRESENTAÇÃO

"Os alunos que hoje educamos mudarão, provavelmente, de atividade profissional durante a sua vida. As ocupações profissionais que tiverem desenvolver-se-ão e modificar-se-ão à sua volta. Por isso eles irão necessitar de capacidades básicas que lhes permitam aplicar os seus conhecimentos a novas situações e controlar a própria aprendizagem ao longo da vida".

- Como preprará-los para isso ?

- Ensinando-lhes a refletir, analisar e tirar conclusões para que possam dominar o conhecimento que lhes dará auto confiança e autonomia. E a geometria pode ser considerada como particular meio de efetivar a forma de educação a ser alcançada desde que o seu ensino se torne motivante e mais criador.

- E como torná-lo motivante e mais criador ?

- Utilizando as transformações geométricas no seu ensino, uma vez que:

elas se apresentam na natureza animal, vegetal e inanimada;

encontram-se nas construções do homem: arquitetura e ciências;

permitem ao homem visualizar e verbalizar como os objetos se movem no universo, usando translações, simetrias e rotações;

são utilizadas pelos computadores;

oferecem novas formas de demonstração de teoremas clássicos da Geometria Euclidiana;

Os autores

SUMÁRIO

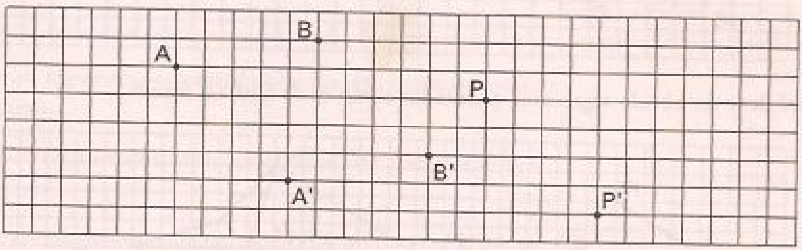
Ficha 1

TRANSLAÇÃO

1. Você vai estudar a seguir uma relação entre pontos, chamada *transformação geométrica*.

2. Considere, na figura a seguir, a relação que ao ponto A faz corresponder o ponto A', ao ponto B o ponto B' e ao ponto P o ponto P'.

Ligue, por meio de uma régua, cada ponto ao seu correspondente.



Os segmentos AA', BB' e PP', que você obteve, são chamados *segmentos orientados*.

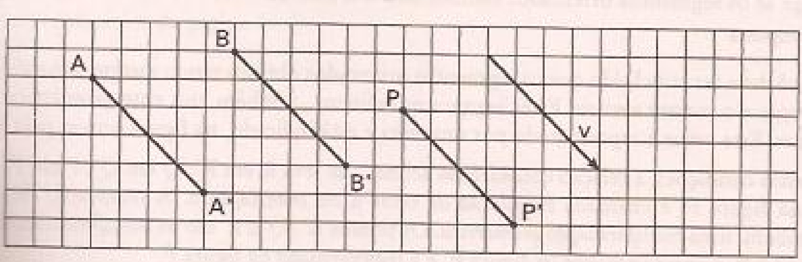
Diga se os segmentos orientados obtidos têm o *mesmo tamanho*.
Resposta

Observe que os segmentos orientados obtidos têm a *mesma direção*.

Observe, também, que os segmentos orientados obtidos têm o *mesmo sentido*.

Assim, pode-se concluir que os segmentos orientados AA', BB' e PP' têm o *mesmo tamanho*, a *mesma direção* e o *mesmo sentido*.

Estes segmentos definem um ente geométrico chamado *vetor*. Este vetor é representado por uma seta e está indicado, na figura a seguir, pela letra v.

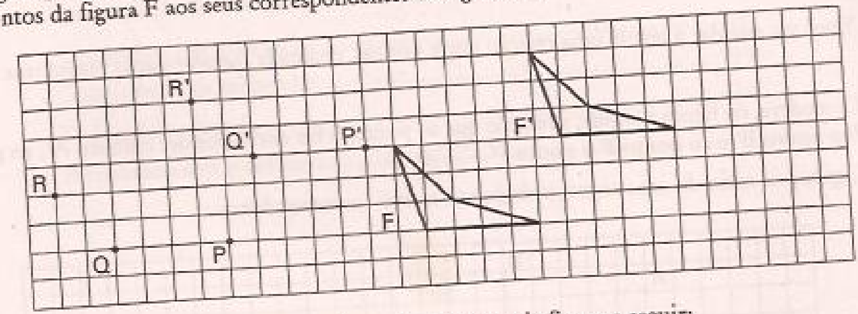


Nas condições consideradas acima, a relação que leva A em A', B em B' e P em P' é chamada *translação de vetor* v ou *translação* v.

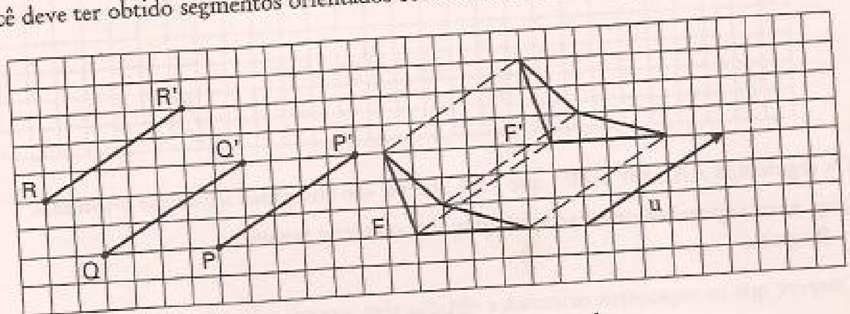
A translação de vetor v é uma *transformação geométrica*. Os pontos A', B' e P' são chamados *transformados* dos pontos A, B e P, respectivamente.

3. Considere, agora, na figura a seguir, a relação que ao ponto R faz corresponder o ponto R', ao ponto Q o ponto Q', ao ponto P o ponto P' e à figura F a figura F'.

Ligue, por meio de uma régua, cada ponto ao seu correspondente. Ligue, também, alguns pontos da figura F aos seus correspondentes na figura F'.



Você deve ter obtido segmentos orientados como os da figura a seguir:



Diga se os segmentos orientados obtidos têm o *mesmo tamanho*.

Resposta

Diga se os segmentos orientados obtidos têm a *mesma direção*.

Resposta

Diga se os segmentos orientados obtidos têm o *mesmo sentido*.

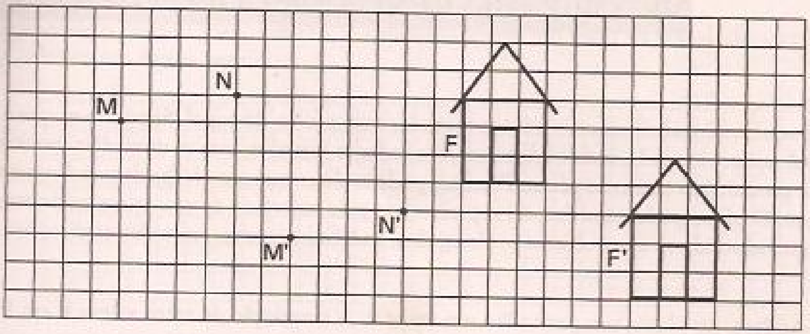
Resposta

Você deve ter concluído que os segmentos orientados obtidos têm o *mesmo tamanho*, a *mesma direção* e o *mesmo sentido*. Estes segmentos definem , também, um ente geométrico chamado *vetor*. Este vetor é representado por uma seta e está indicado, na figura acima, pela letra u.

Nestas condições, a relação considerada acima, que leva R em R', Q em Q', P em P' e a figura F na figura F' é chamada *translação de vetor* u ou *translação* u. A translação de vetor u é, também, uma *transformação geométrica*. Os pontos R', Q' e P' são os *transformados* dos pontos R, Q e P, respectivamente. A figura F' é a *transformada* da figura F.

4. Considere a relação que ao ponto M faz corresponder o ponto M', ao ponto N faz corresponder o ponto N' e à figura F faz corresponder a figura F'.

Ligue, por meio de uma régua, cada ponto ao seu correspondente. Ligue, também, alguns pontos da figura F aos seus correspondentes na figura F'.



Diga se os segmentos orientados obtidos têm o *mesmo tamanho.*
Resposta

Diga se os segmentos orientados obtidos têm a *mesma direção.*
Resposta

Diga se os segmentos orientados obtidos têm o *mesmo sentido.*
Resposta

Você deve ter concluído que os segmentos orientados obtidos têm o *mesmo tamanho*, a *mesma direção* e o *mesmo sentido*. Por isso, esses segmentos definem um *vetor*. Represente, na figura acima, esse vetor e indique pela letra w.

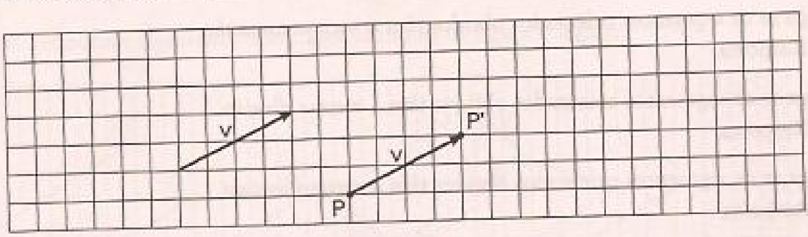
Nestas condições, a relação considerada, que leva M em M', N em N' e a figura F em F', é chamada *translação de vetor* w ou *translação* w. Os pontos M' e N' são os *transformados* dos pontos M e N, respectivamente. A figura F' é a *transformada* da figura F.

Resolva os exercícios da página 14.

Ficha 2 TRANSLAÇÃO: SOMA DE UM PONTO COM UM VETOR E DIFERENÇA DE DOIS PONTOS

1. Até aqui você trabalhou com pontos tomados numa folha de papel. Supondo-se que a folha de papel seja prolongada, indefinidamente, em todas as direções, tem-se uma idéia intuitiva de um ente geométrico chamado *plano*. Por isso, pode-se dizer que uma folha de papel representa um plano. O plano pode, também, ser representado pela superfície de uma mesa ou de uma quadro de giz, supondo-se esses objetos prolongados, indefinidamente, em todas as direções.

2. Considere, no plano, um ponto P e um vetor v. A translação de vetor v leva P em P'.



O ponto P', transformado do ponto P pela translação de vetor v é, também, chamado *soma do ponto P com o vetor* v e pode-se escrever

$$P' = P + v$$

Assim, no plano, fica definida a soma do ponto P com o vetor v, que é o ponto P', isto é,

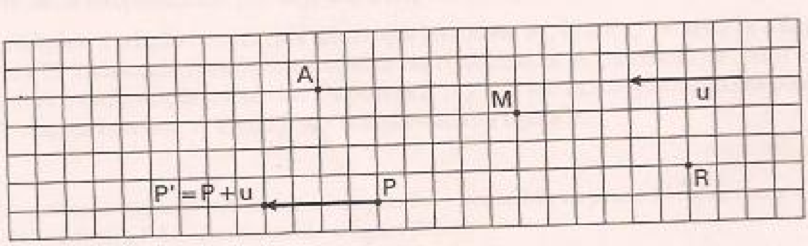
$$P + v = P'$$

Portanto,

> No plano, a soma de um ponto com um vetor é um ponto.

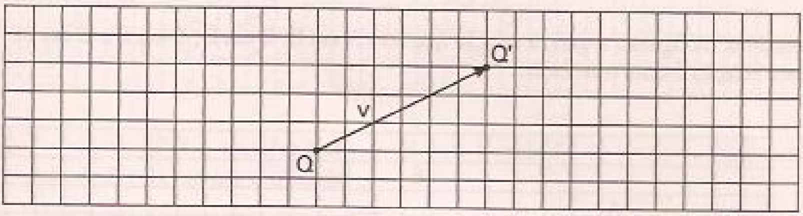
3. Na figura a seguir o ponto P' é o transformado de P pela translação de vetor u, isto é, P' = P + u.

Ache os pontos A + u, M + u e R + u.



4. Considere, agora, no plano, dois pontos, Q e Q'.

Ligando-se o ponto Q ao ponto Q' e indicando-se por v o vetor da translação que leva Q em Q', obtém-se a figura seguinte:



O vetor v é chamado *diferença dos pontos Q' e Q* e pode-se escrever

$$v = Q' - Q$$

Assim, no plano, fica definida a diferença dos pontos Q' e Q, que é o vetor v, isto é,

$$Q' - Q = v$$

Portanto,

No plano, a diferença de dois pontos é um vetor.

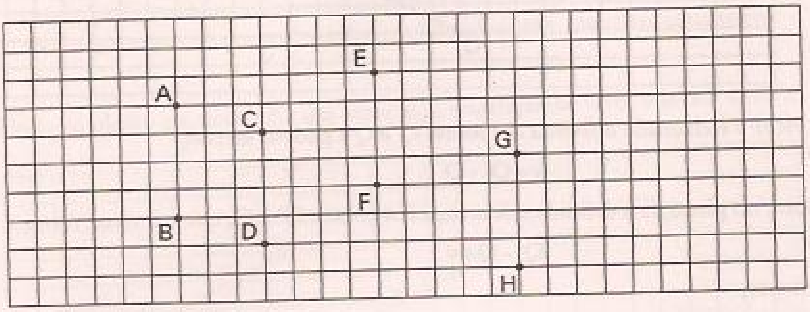
Observação: O vetor $v = Q' - Q$ é, também, indicado por $v = \overrightarrow{QQ'}$

Resolva os exercícios da página 15.

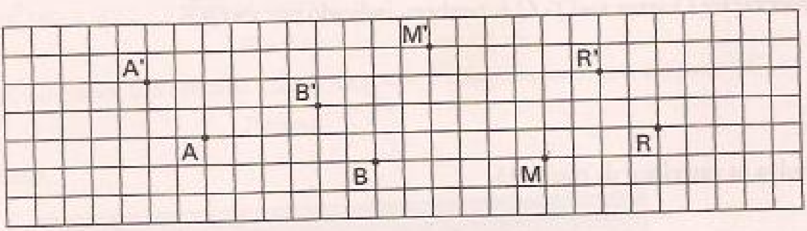
EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 1

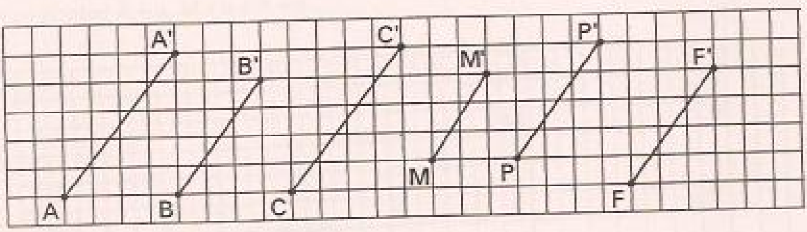
1. Considere, na figura a seguir, a relação que leva A em B, C em D, E em F e G em H. Verifique se esta relação é uma translação.



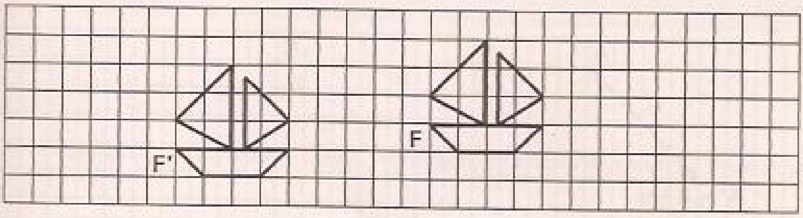
2. Considere, na figura a seguir, a relação que leva A em A', B em B', M em M' e R em R'. Verifique se esta relação é uma translação.



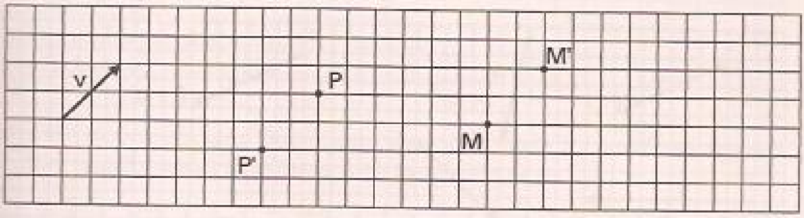
3. Observe a figura a seguir e diga quais os segmentos orientados que definem um mesmo vetor.



4. A figura F' é obtida da figura F por uma translação de vetor v. Represente este vetor.

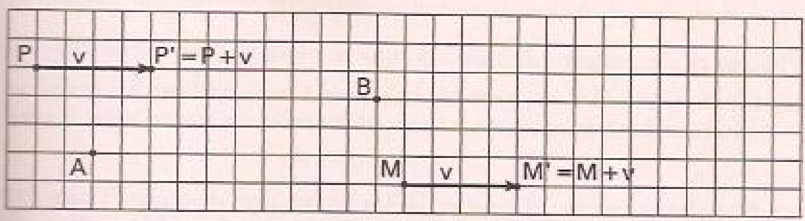


5. Na figura a seguir, M' é o transformado de M pela translação de vetor v. Diga se P' é o transformado de P pela mesma translação.

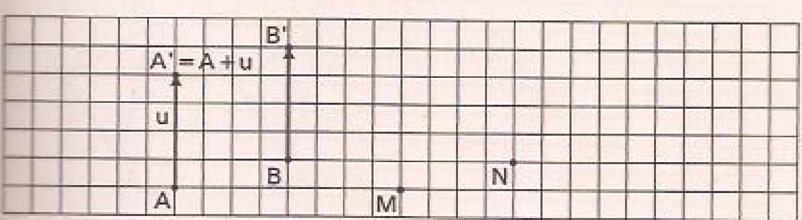


Exercícios para a ficha 2

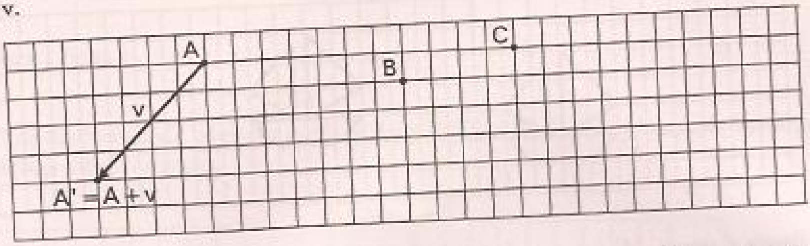
1. Na figura a seguir, P' é o transformado de P pela translação de vetor v; M' é o transformado de M pela mesma translação. Ache os transformados de A e B pela translação de vetor v.



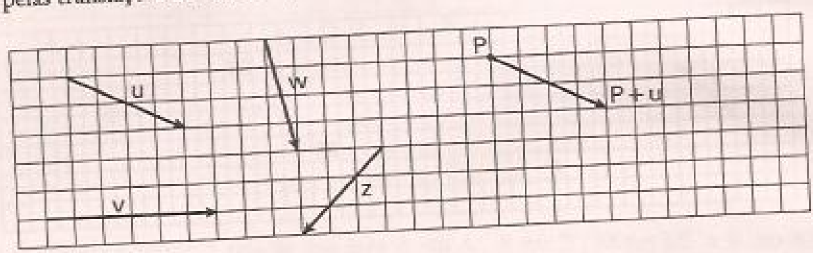
2. Na figura a seguir, A' é o transformado de A pela translação de vetor u; B' é o transformado de B pela mesma translação. Ache os transformados de M e N pela translação de vetor u.



3. Na figura a seguir, A' é o transformado de A pela translação de vetor v. Ache os pontos B + v e C+v.



4. Na figura a seguir, P + u é o transformado de P pela translação de vetor u. Ache os transformados de P pelas translações de vetores v, w e z.

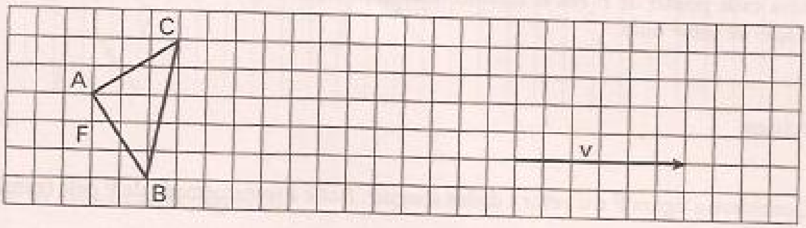


Ficha 3

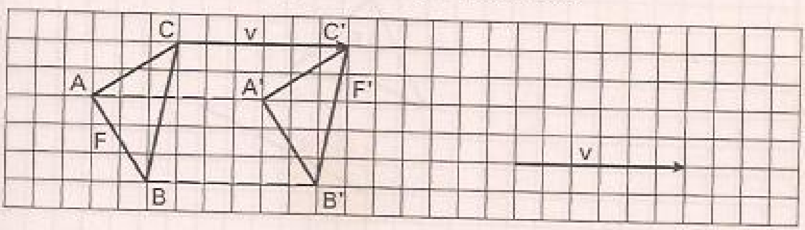
CONGRUÊNCIA POR TRANSLAÇÃO

1. Considere a figura F e o vetor v, dados a seguir.

Ache os transformados dos pontos A, B e C, de F, pela translação de vetor v e ligue os pontos obtidos.



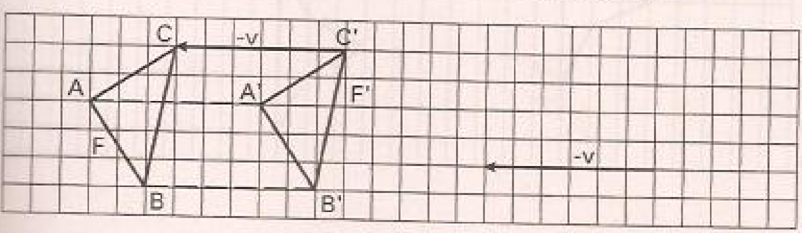
Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte, onde F é levada na figura F' cujos pontos são os transformados dos pontos correspondentes de F.



A figura F', obtida de F pela translação de vetor v, é chamada transformada da figura F.

Portanto, dada uma figura F qualquer e uma translação de vetor v, F é levada por esta translação numa figura F' cujos pontos são os transformados dos pontos correspondentes de F.

2. Dada uma figura F, você pode verificar que se F é levada em F' por uma translação de vetor v, então a figura F' é levada em F por uma translação cujo vetor tem o *mesmo tamanho*, a *mesma direção* e o *sentido contrário* ao do vetor v. Esse vetor é indicado por -v.



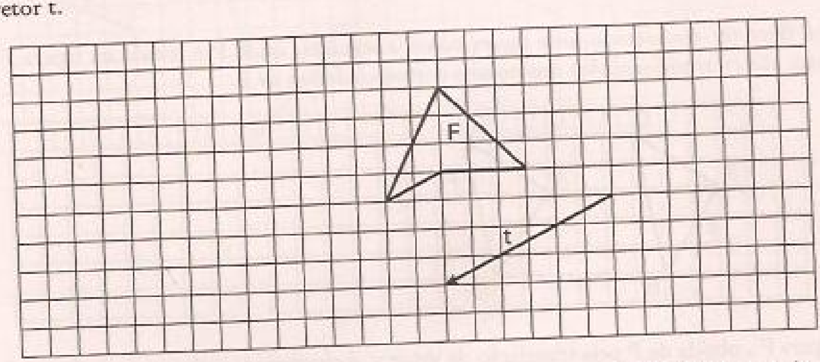
Definição

> Dadas duas figuras F e F', se uma pode ser obtida da outra por uma translação, diz-se que F e F' são *congruentes*.
>
> Escreve-se $F \cong F'$ e se lê F "é congruente a" F'.

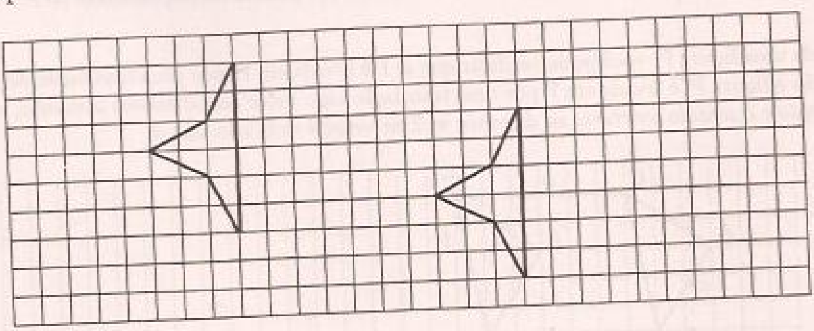
Observe que toda figura F é congruente a si mesma, pois F é obtida de F por uma translação que leva cada ponto de F em si mesmo. Esta translação é chamada *translação identidade* ou *translação de vetor nulo*.

Exercícios

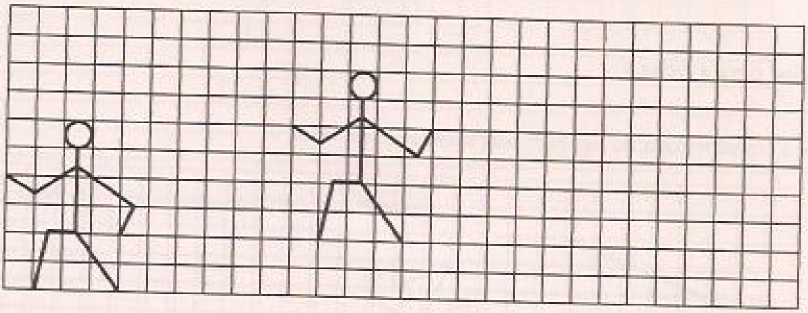
1º) Considere a figura F e o vetor t dados a seguir. Ache a transformada de F pela translação de vetor t.



2º) Verifique se as figuras seguintes são congruentes por translação. Em caso afirmativo, represente o vetor translação.



3º) Verifique se as figuras seguintes são congruentes por translação. Em caso afirmativo, represente o vetor translação.

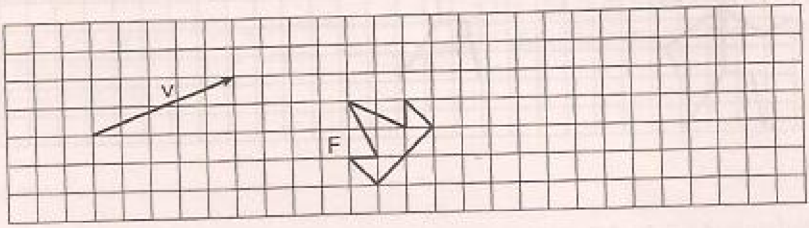


Resolva os exercícios da página 20.

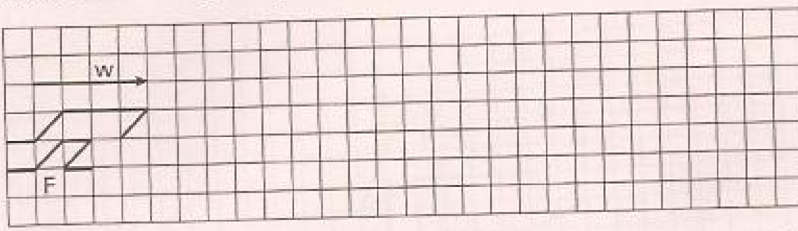
EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 3

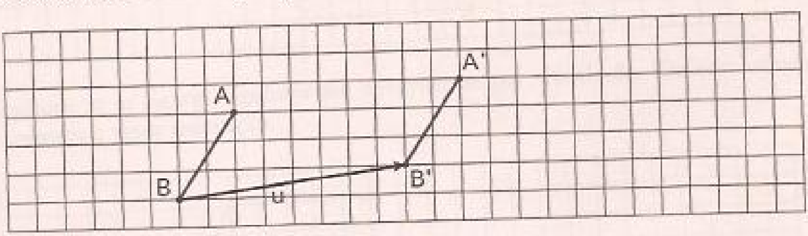
1. Ache a transformada da figura F pela translação de vetor v.



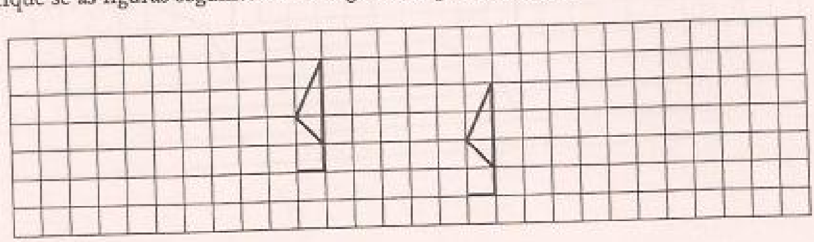
2. Ache a transformada da figura F pela translação de vetor w.



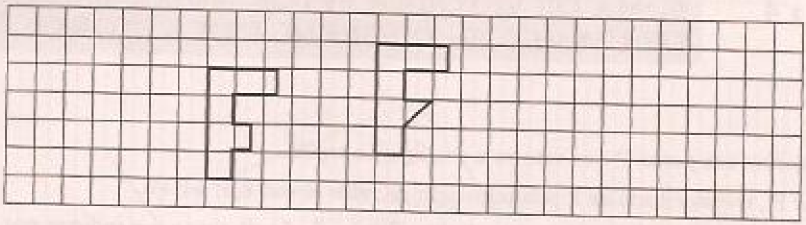
3. Na figura dada a seguir, o segmento AB é levado no segmento A'B' pela translação de vetor u. Represente o vetor da translação que leva o segmento A'B' no segmento AB.



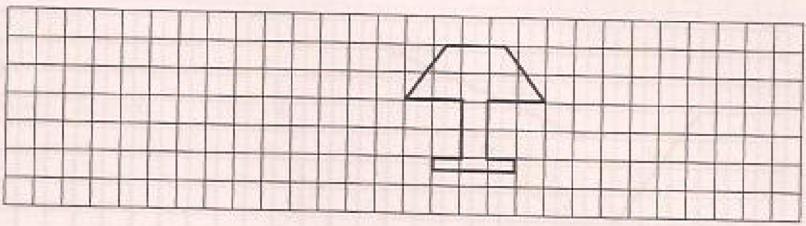
4. Verifique se as figuras seguintes são congruentes por translação.



5. Verifique se as figuras seguintes são congruentes por translação.



6. Construa uma figura congruente à figura dada a seguir.

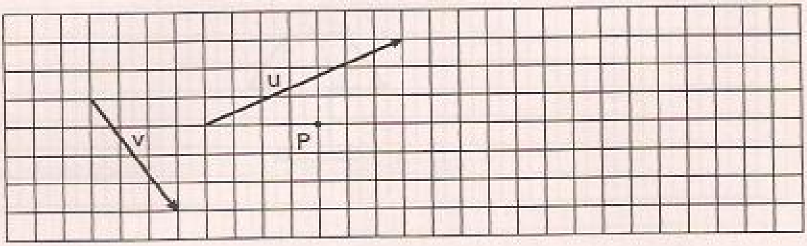


Ficha 4 SOMA DE VETORES; VETOR NULO; SIMÉTRICO DE UM VETOR; DIFERENÇA DE VETORES

1. Considere um ponto P e os vetores u e v, figura a seguir.

Ache P', transformado de P pela translação de vetor u, isto é, P' = P + u.

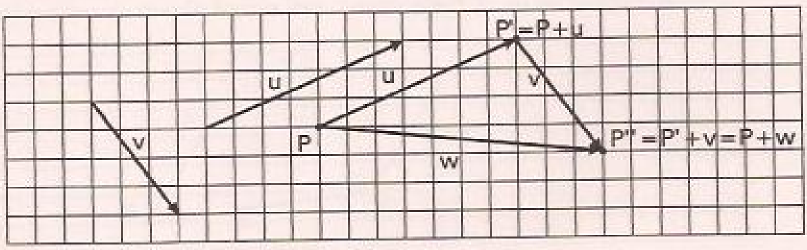
Ache, em seguida, o transformado de P' pela translação de vetor v e indique por P" esse transformado, isto é, P" = P' + v.



Diga se existe uma translação que leve, diretamente, P em P".
Resposta

Você deve ter encontrado uma translação que leva, diretamente, P em P" Chame essa translação de translação de vetor w. Indique o vetor w na figura acima.

Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



O vetor w é chamado *soma dos vetores* u e v e pode-se escrever

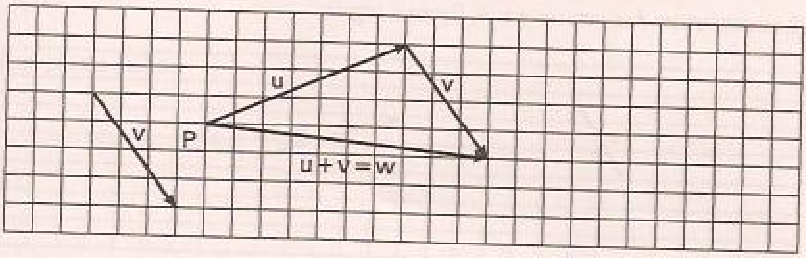
$$u + v = w$$

Portanto,

> No plano, a soma de dois vetores é um vetor.

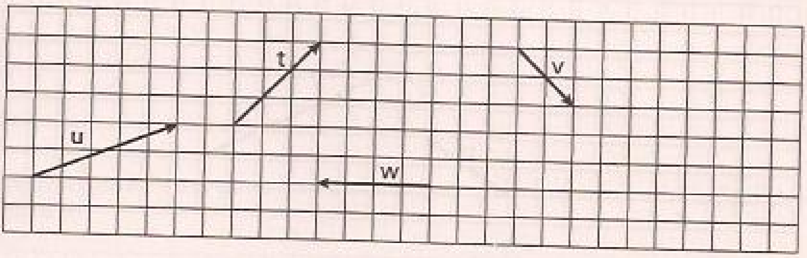
Assim, fica definida entre vetores a operação *adição*.

2. Na prática, para achar o vetor soma dos vetores u e v, dados acima, pode-se proceder como se fez na figura a seguir.



3. Dados os vetores u , v, w e t, figura a seguir, ache:

a) u+w; b)w+t; c)v+v.



Observação: A soma v+v, de dois vetores iguais, pode ser indicada por 2v.

4. Como você viu, na ficha 3, existe a translação de vetor nulo que leva uma figura em si mesma. O vetor nulo, que será indicado por 0, goza da seguinte

Propriedade

u+0= 0+u, qualquer que seja o vetor u.

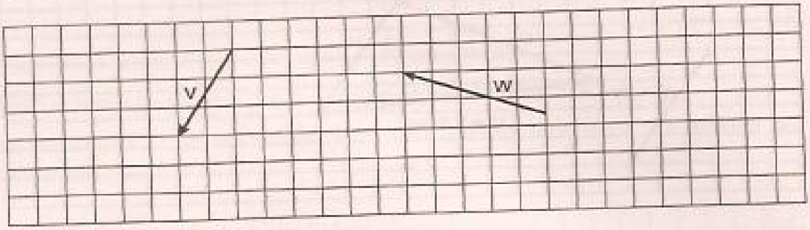
5. Como você também viu, na ficha 3, a cada vetor u corresponde o vetor -u que tem o mesmo tamanho, a mesma direção e o sentido contrário ao do vetor u. O vetor -u é chamado *simétrico* ou *oposto* de u e goza da seguinte

Propriedade

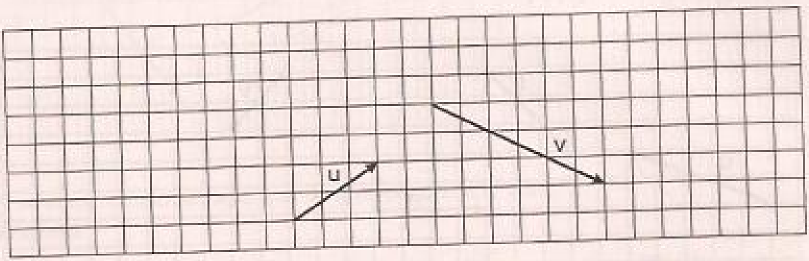
u+(-u)=(-u)+u=0

Exercícios

1º) Dê os simétricos dos vetores v e w, figura a seguir:



2º) Dados os vetores u e v, figura a seguir, ache a soma u+(-v).



Observação: A soma de um vetor u com o oposto de um vetor v chama-se *diferença* dos vetores u e v e se indica por u-v, isto é,

$$\boxed{u+(-v)= u-v}$$

Resolva os exercícios da página 25.

EXERCÍCIOS

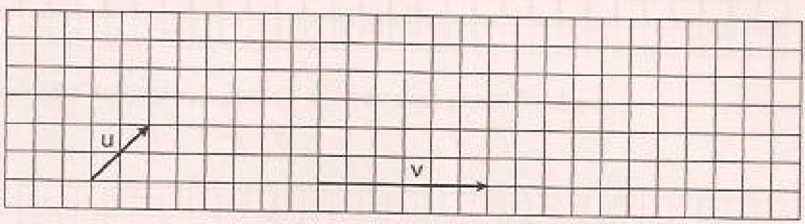
Exercícios para a ficha 4

1. Dados os vetores u e v, ache:

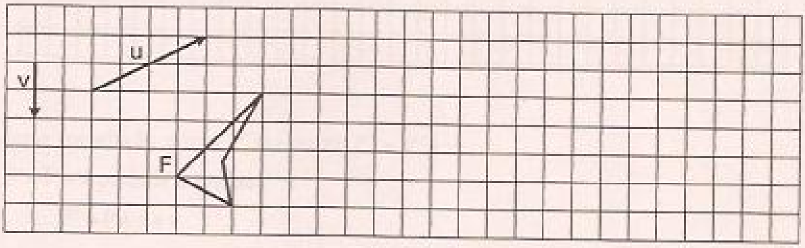
   a) u + v

   b) u + u

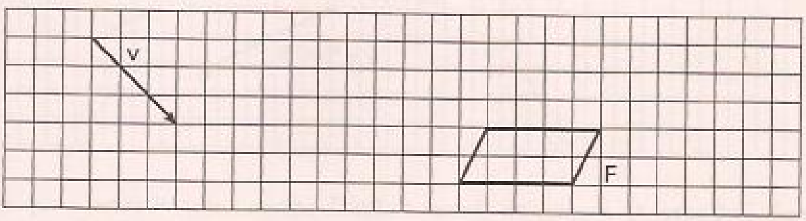
   c) -u + (-u)



2. Considere a figura F e os vetores u e v dados a seguir. Ache a transformada de F pela translação de vetor u + v.



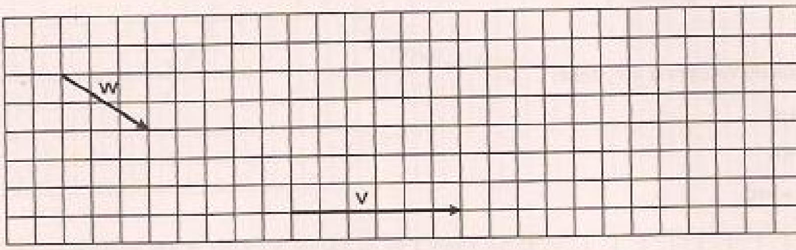
3. Considere a figura F e o vetor v dados a seguir. Ache a transformada de F pela translação de vetor -v.



4. Dados os vetores v e w, ache:

a) v-w

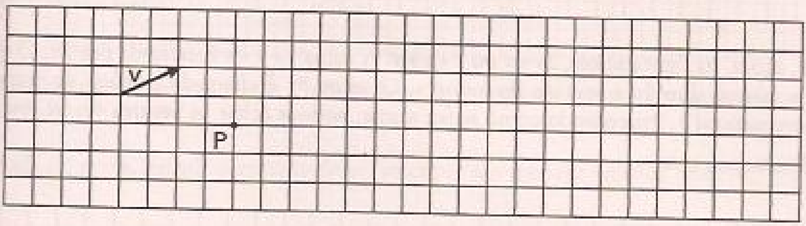
b) -v-w



Ficha 5

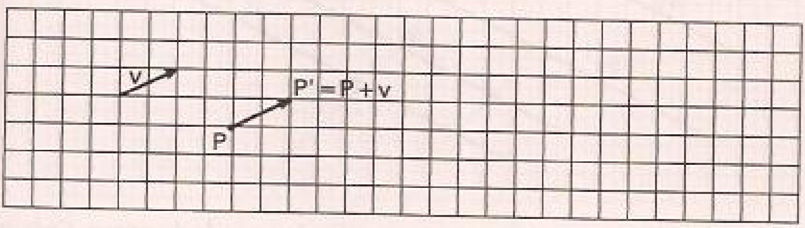
PRODUTO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL

1. Considere um ponto P e um vetor v, figura a seguir.



Pela translação de vetor v, o ponto P é levado num ponto P' tal que

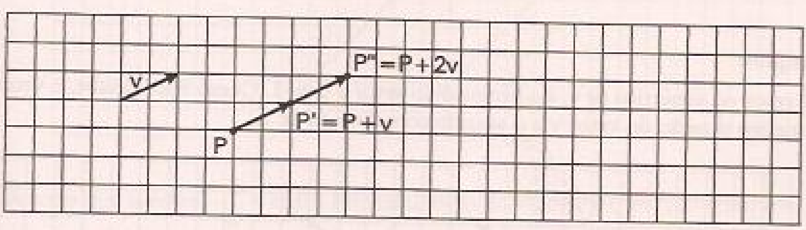
$$P' = P + v$$



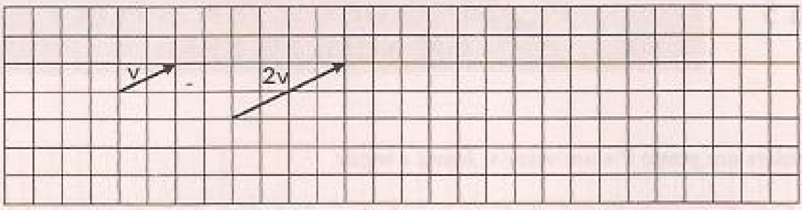
Essa mesma translação v leva P' no ponto $P'' = P' + v$.

Como $P' = P + v$ pode-se escrever

$$P'' = P + v + v$$
$$\text{ou } P'' = P + 2v$$

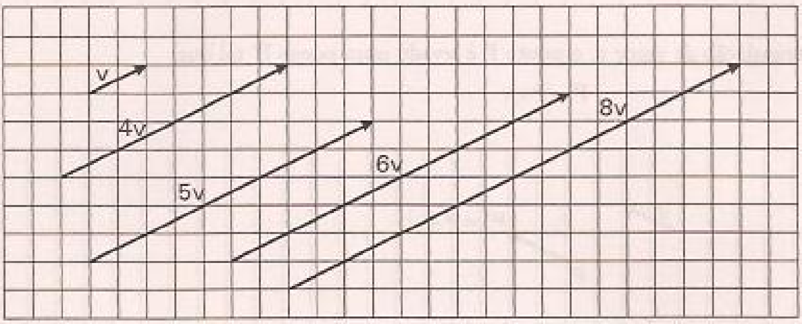


Observe que o vetor 2v tem a mesma direção e sentido do vetor v. O vetor 2v é chamado *produto do vetor* v *pelo número natural* 2.



Ache, agora, na figura acima, 2v+v ou v+v+v. A soma v+v+v é indicada por 3v. O vetor 3v tem a mesma direção e sentido do vetor v. O vetor 3v é chamado *produto do vetor* v *pelo número natural* 3. Procedendo como se fez acima, pode-se achar os vetores 4v, 5v, 6v,...

Graficamente, tem-se



Observe que os vetores 4v, 5v, 6v,..., têm a mesma direção e sentido do vetor v. Cada um desses vetores 4v, 5v, 6v,..., é chamado *produto de* v *pelos números naturais* 4, 5, 6,..., respectivamente.

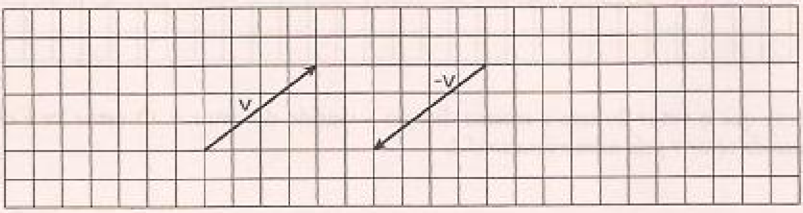
Nestas condições, fica definido o produto de um vetor por um número natural qualquer.

2. Você viu, no item anterior, como se acha o produto de um vetor por um número natural qualquer.

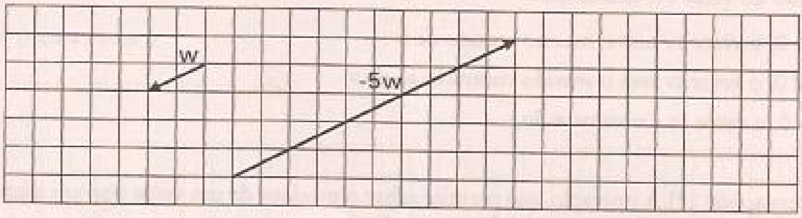
   Pode-se definir, também, o *produto de um vetor por um número inteiro relativo.*

Exemplos:

a) O vetor -v, simétrico de v, é o produto do vetor v por -1. Como você já sabe, o vetor -v tem a mesma direção do vetor v e o sentido contrário ao de v.



b) O vetor -5w é o produto do vetor w por -5.

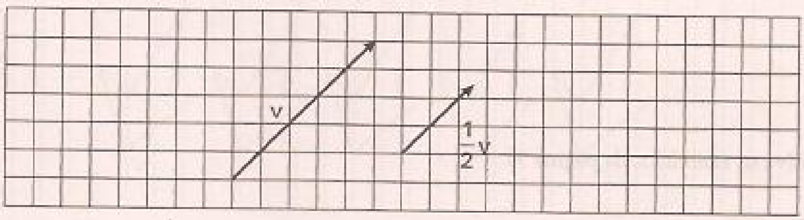


Observe que o vetor -5w tem a mesma direção do vetor w e o sentido contrário ao de w.

3. Pode-se, ainda, definir o *produto de um vetor por um número racional relativo*.

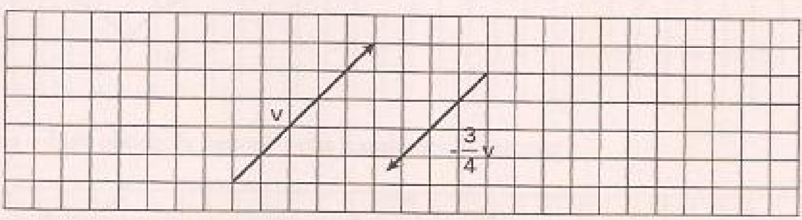
Exemplos:

a) O vetor $\frac{1}{2}$v é o produto de v por $\frac{1}{2}$.



Observe que o vetor $\frac{1}{2}$v tem a mesma direção e sentido do vetor v.

b) O vetor $-\frac{3}{4}$v é o produto de v por $-\frac{3}{4}$.



Observe que o vetor $-\frac{3}{4}$v tem a mesma direção do vetor v e o sentido contrário ao de v.

4. Como você viu, nos itens anteriores, pode-se definir o produto de um vetor por um número natural, por um número inteiro relativo e por um número racional relativo. Pode-se definir, ainda, o *produto de um vetor v por um número real t qualquer*.

O vetor tv, produto do vetor v por um número real t, tem a mesma direção de v. Quanto ao sentido do vetor tv, tem-se que:

se $t > 0$, o vetor tv tem o mesmo sentido de v

se $t < 0$, o vetor tv tem o sentido contrário ao de v

se $t = 0$, o vetor tv é o vetor nulo.

Observações: 1ª) A operação que permite achar o produto de um vetor por um número real chama-se *multiplicação escalar*.

2ª) Quando dois vetores têm a mesma direção diz-se que eles são *paralelos*. Em particular, todo vetor é paralelo a si mesmo.

Resolva os exercícios da página 31.

EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 5

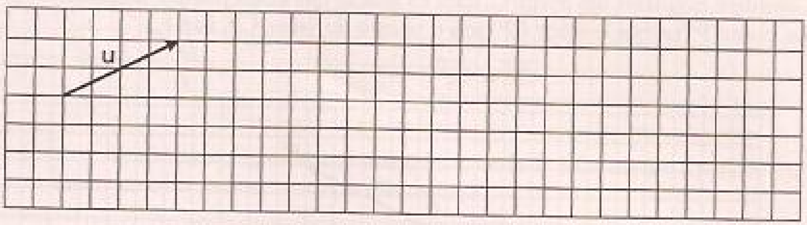
1. Dado o vetor u, figura a seguir, ache:

a) 2u

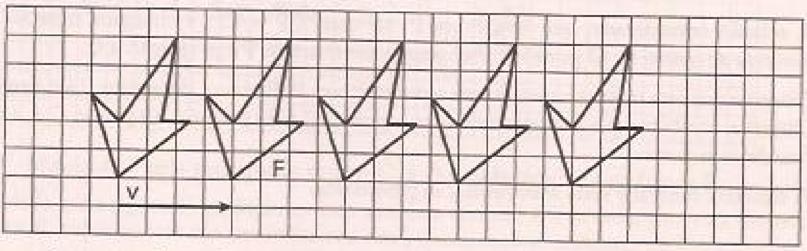
b) - 3u

c) $\frac{3}{4}$ u

d) $-\frac{1}{2}$ u



2. A seguir tem-se um friso que foi obtido a partir da figura F por um conjunto de translações. Dê os vetores correspondentes a essas translações.

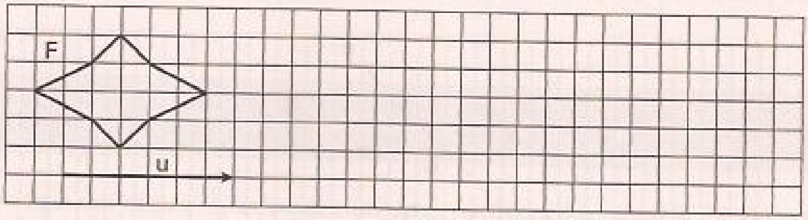


3. Ache as transformadas de F pelas translações de vetores:

a) u

b) 2u

c) 3u



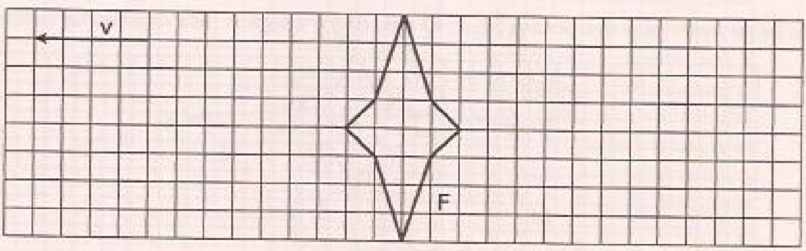
4. Construa o friso obtido da figura F pelas translações de vetores:

a) v

b) 2v

c) -v

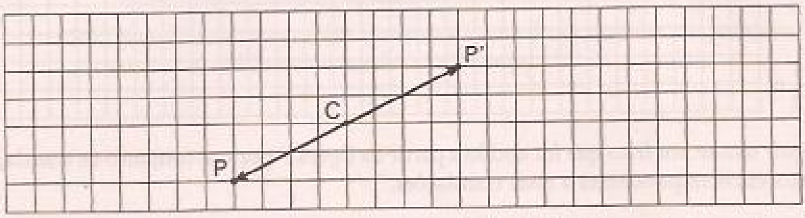
d)-2v



Ficha 6 — SIMETRIA NO PLANO; CONGRUÊNCIA POR SIMETRIA

1. Considere, no plano, um ponto C, fixo, e a relação que a cada ponto P do plano faz corresponder um ponto P' tal que o vetor CP' seja o oposto do vetor CP, isto é,

$$\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$$

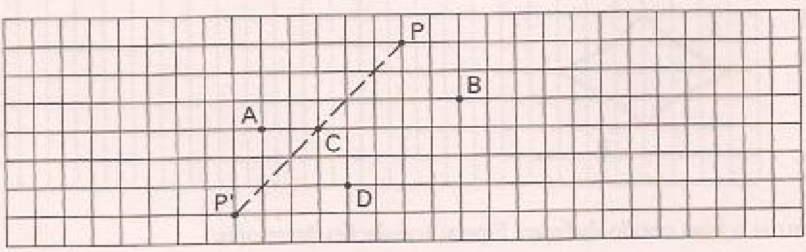


A relação considerada, que leva P em P' tal que $\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$, é chamada *simetria central* ou *simetria de centro C*. O ponto P' é chamado *simétrico* de P em relação a C.

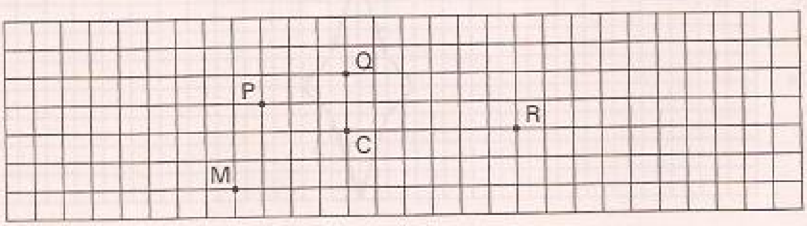
Observe que essa mesma simetria leva o ponto P' em P. Por isso, diz-se que P é o simétrico de P'. Observe, também, que essa simetria leva o ponto C nele próprio. O ponto C é *o único ponto fixo* dessa simetria.

A simetria central é uma *transformação geométrica.*

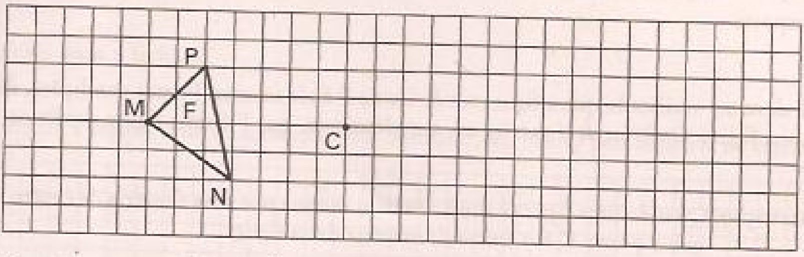
2. Na figura a seguir, o ponto P' é o simétrico de P pela simetria de centro C. Ache os simétricos dos pontos A, B e D pela mesma simetria de centro C.



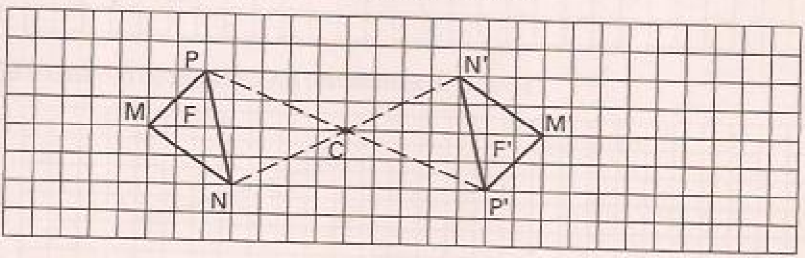
3. Ache os simétricos dos pontos M, P, Q e R, dados a seguir, pela simetria de centro C.



4. Considere a figura F e o ponto C, dados a seguir. Ache os simétricos dos pontos M, N e P, de F, pela simetria de centro C e ligue os pontos obtidos.



Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte, onde F é levada na figura F' cujos pontos são os simétricos dos pontos correspondentes de F.



A figura F', obtida de F pela simetria de centro C, é chamada *simétrica* da figura F.

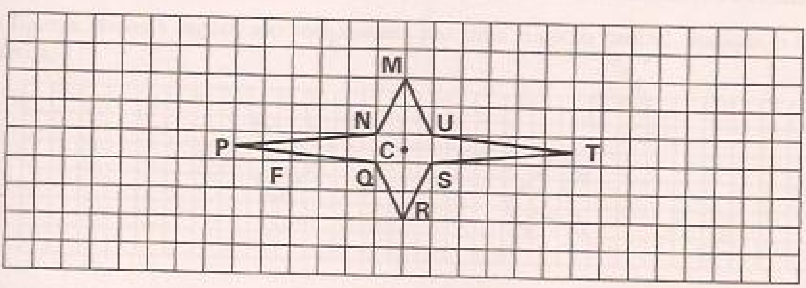
Portanto, dada uma figura F qualquer e uma simetria central, F é levada, por esta simetria, numa figura F' cujos pontos são os simétricos dos pontos correspondentes de F.

Você pode verificar que se uma figura F é levada em uma figura F' por uma simetria central, então a figura F' é, também, levada em F pela mesma simetria.

Definição

> Dadas duas figuras, F e F', se uma pode ser obtida da outra por uma simetria central, diz-se que F e F' são *congruentes*. Escreve-se $F \equiv F'$ e se lê F "é congruente a" F'.

5. Considere a figura a F, dada a seguir, e diga quais são os simétricos dos pontos M, N, P, Q, R, S, T e U pela simetria de centro C.



Resposta

Diga qual é a figura simétrica da figura F.

Resposta

Você deve ter verificado que a figura simétrica de F é ela mesma. Nestas condições, diz-se que F é uma figura *simétrica de si mesma* ou, simplesmente, que F é uma figura *simétrica.*

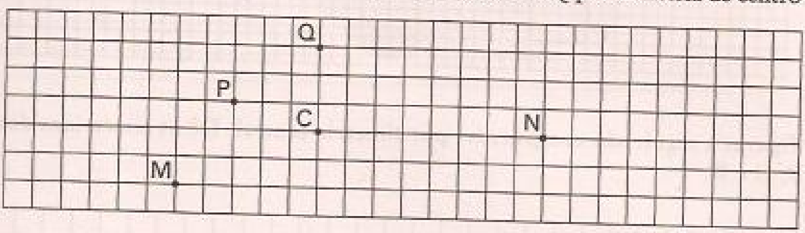
Observação: Quando uma figura é simétrica de si mesma por uma simetria de centro C, diz-se que o ponto C é o *centro de simetria* dessa figura.

Resolva os exercícios da página 35.

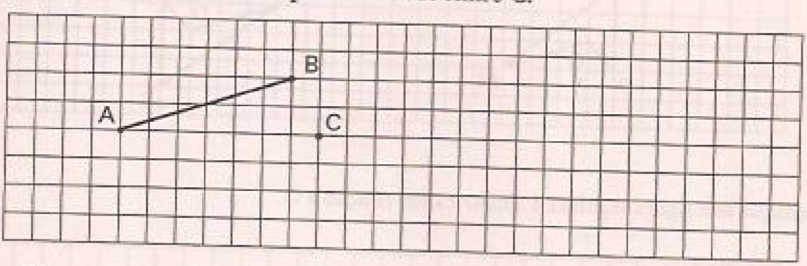
EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 6

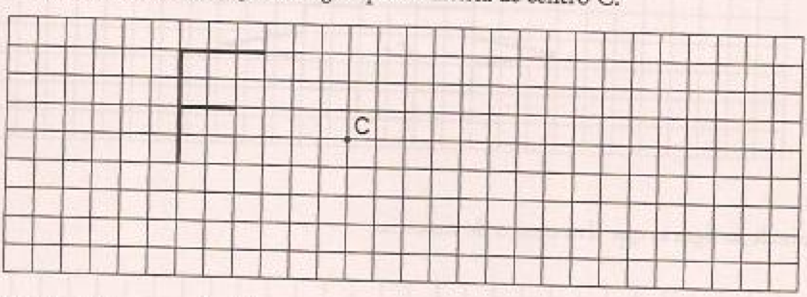
1. Na figura a seguir, ache os simétricos dos pontos P, M, N e Q pela simetria de centro C.



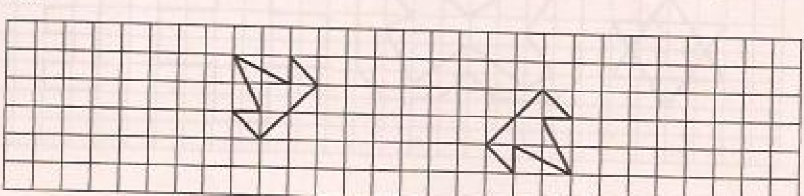
2. Ache o simétrico do segmento AB pela simetria de centro C.



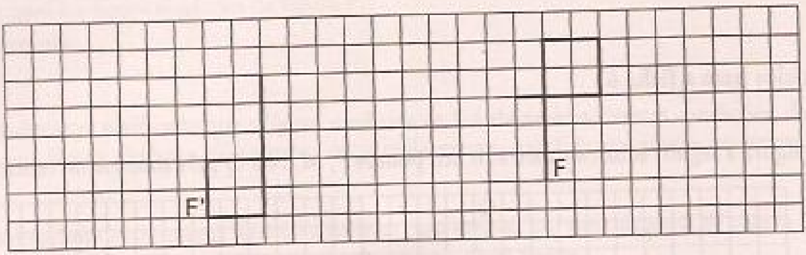
3. Ache a figura simétrica da figura a seguir pela simetria de centro C.



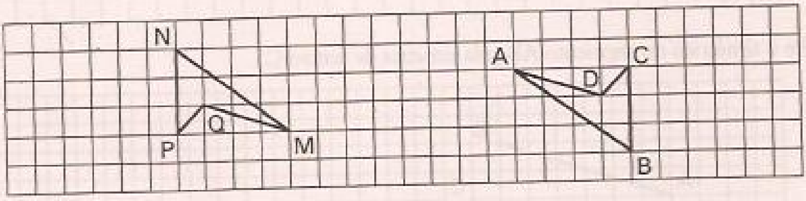
4. As figuras, dadas a seguir, são congruentes por uma simetria central. Indique o centro da simetria.



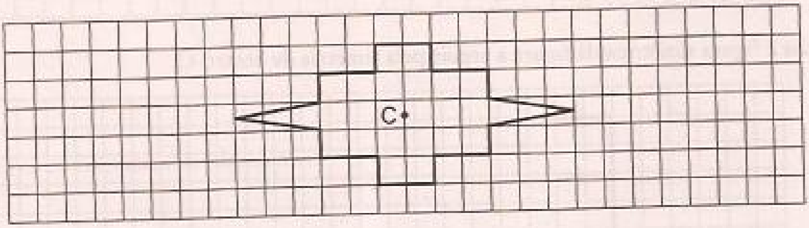
5. Dê o centro da simetria que leva a figura F na figura F'.



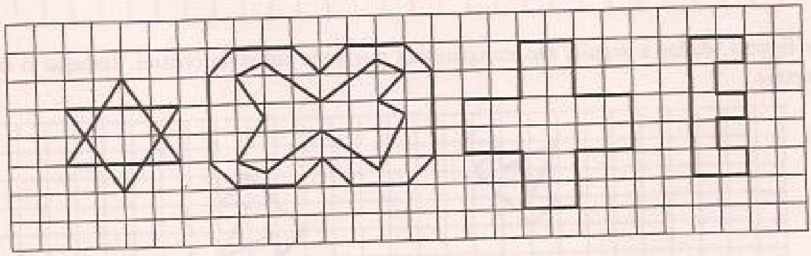
6. As figuras a seguir são congruentes por simetria central. Dê os simétricos dos pontos A, B, C e D.



7. Verifique se a figura seguinte é simétrica em relação a C.



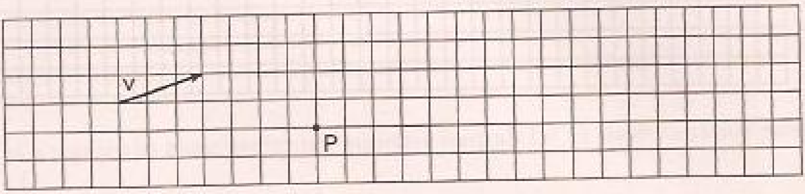
8. Assinale as figuras que têm centro de simetria.



9. Desenhe duas figuras congruentes por simetria.

Ficha 7 RETA NO PLANO

1. Considere um ponto P e um vetor v, não nulo, figura a seguir.



Represente, na figura acima, os seguintes pontos:

a) o transformado de P pela translação de vetor v;

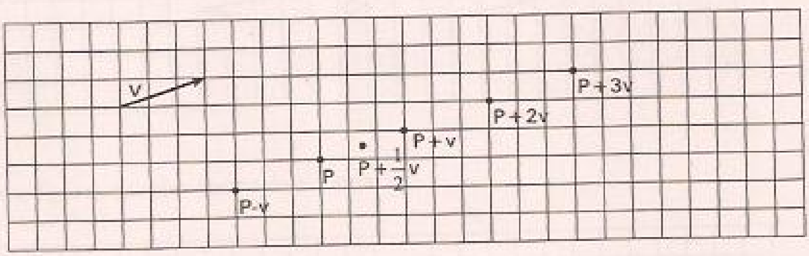
b) o transformado de P pela translação de vetor 2v;

c) o transformado de P pela translação de vetor 3v;

d) o transformado de P pela translação de vetor -v;

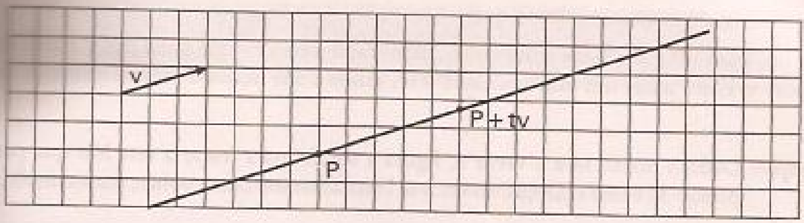
e) o transformado de P pela translação de vetor $\frac{1}{2}$ v.

Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



Observe que os pontos encontrados, P + v, P + 2v, P + 3v, P-v, P + $\frac{1}{2}$ v, foram obtidos somando-se ao ponto P o vetor tv sendo t = 1, t = 2, t = 3, t = -1, t = $\frac{1}{2}$, respectivamente.

Se você pudesse construir todos os pontos P + tv, sendo t um número real qualquer, você obteria uma figura como a seguinte:



Essa figura, que você já conhece, é uma *reta*.

Assim, dado um ponto P qualquer e um vetor v, não nulo, pode-se obter uma reta somando-se ao ponto P os vetores tv sendo t um número real qualquer. Esta reta passa por P e tem a direção do vetor v.

Portanto,

Um ponto e um vetor não nulo determinam uma reta.

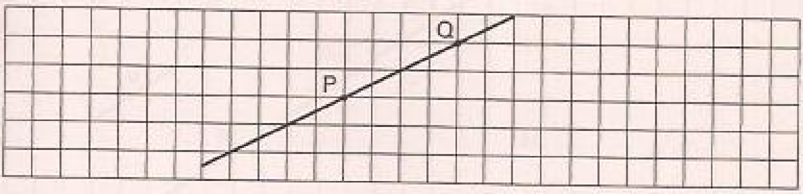
Observações: 1ª) Uma reta que passa por um ponto P e tem a direção de um vetor v é indicada por Pv.

2ª) A reta Pv diz-se *paralela* a v,

3ª) Uma reta pode, também, ser indicada por uma letra minúscula.

2. Considere dois pontos distintos quaisquer P e Q. Esses pontos determinam um vetor não nulo $\overrightarrow{PQ}$.

Como você viu, o ponto P e o vetor PQ determinam uma reta. Assim, pode-se, também, afirmar que esta reta é determinada pelos pontos P e Q e indicada por *reta* PQ.



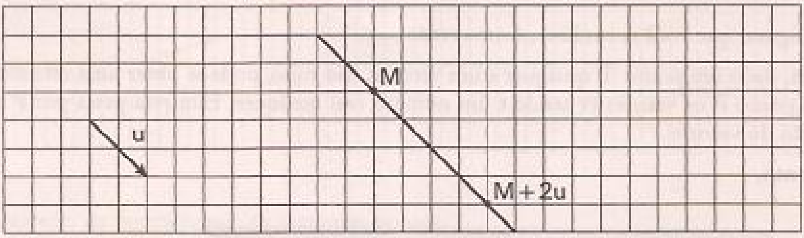
Portanto,

Dois pontos distintos quaisquer, do plano, determinam uma reta.

Desta última afirmação conclui-se que:

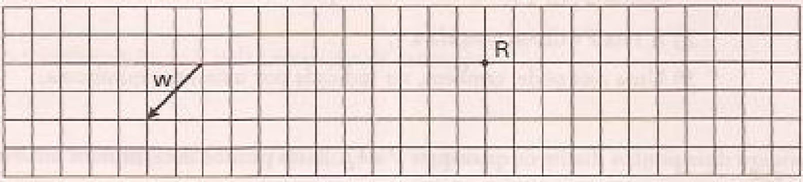
Dado um ponto P e um vetor v, não nulo, para traçar a reta Pv que passa por P e tem a direção do vetor v, basta achar um outro ponto P+tv, sendo t um número real diferente de zero.

Exemplo: Dado o ponto M e o vetor u, figura a seguir, para traçar a reta Mu que passa pelo ponto M e tem a direção do vetor u, basta achar um outro ponto, por exemplo, M+2u.



Exercício

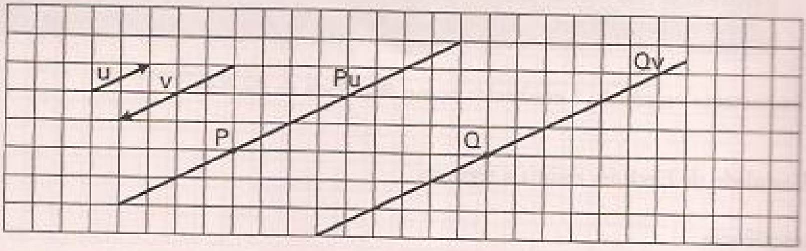
Ache, na figura a seguir, a reta Rw que passa por R e tem a direção do vetor w.



Resolva os exercícios da página 47.

Ficha 8 RETAS PARALELAS

1. Considere os vetores u e v de mesma direção e as retas Pu e Qv, figura a seguir:



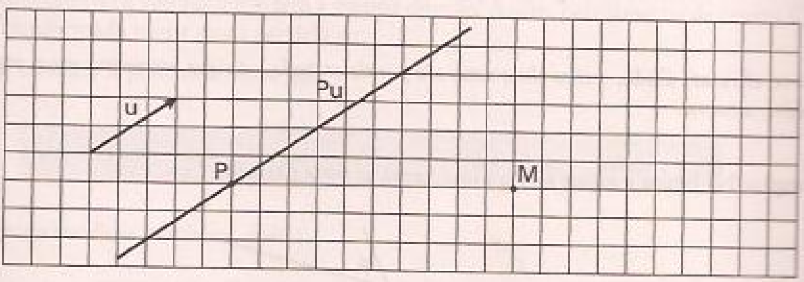
Observe que os vetores u e v são paralelos. Nestas condições, tem-se a seguinte

Definição

Dadas duas retas Pu e Qv, se u e v são vetores paralelos, as retas Pu e Qv dizem-se *paralelas*.

Observação: Como todo vetor é paralelo a si mesmo, pode-se afirmar que *toda reta é paralela a si mesma*.

2. Considere, na figura a seguir, o vetor u, a reta Pu e o ponto M. Trace uma reta paralela ao vetor u passando por M.



A reta Mu é paralela à reta Pu?
Resposta

Por que?
Resposta

Você deve ter concluído que a reta Mu é paralela à reta Pu pois elas têm a mesma direção do vetor u.

Pode-se afirmar que qualquer outra reta paralela a Pu, passando por M, coincide com Mu. Assim, pelo ponto M só é possível traçar *uma única reta* paralela a Pu. Nestas condições, tem-se a seguinte

Conclusão

> Dada uma reta r e um ponto P não pertencente a r, existe *uma única reta* que passa por P e é paralela a r.

Esta importante conclusão é conhecida como *Postulado de Euclides*.

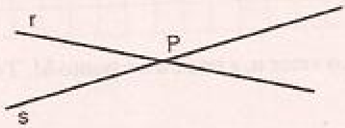
3. Do Postulado de Euclides resulta a seguinte

Conseqüência

> Se duas retas são paralelas e distintas elas não têm um ponto comum.

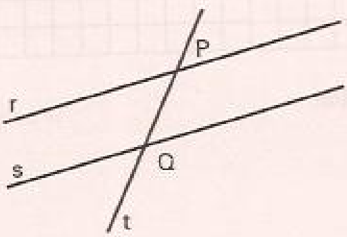
Nestas condições, pode-se afirmar que *duas retas não paralelas têm, sempre, um ponto comum* chamado *ponto de interseção*. Neste caso, diz-se que as retas são *concorrentes*.

Exemplo: As retas r e s, dadas a seguir, são concorrentes.



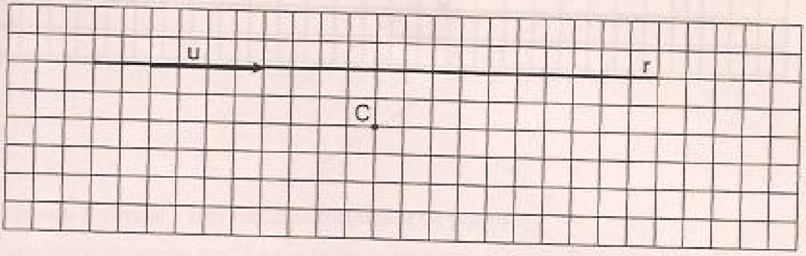
Pode-se afirmar, ainda, que *se duas retas são paralelas, toda reta que intercepta uma, intercepta, também, a outra.*

Exemplo: Na figura a seguir a reta t intercepta as retas paralelas r e s.

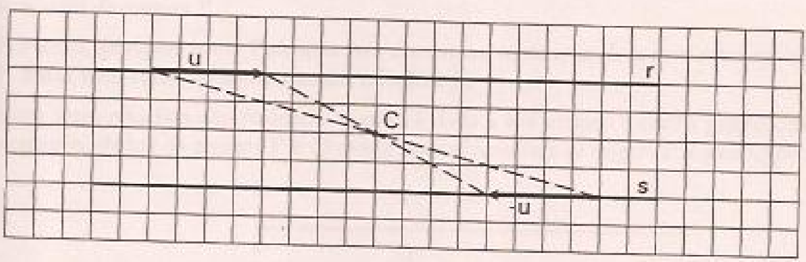


Observação: Quando uma reta r é paralela a uma reta s, pode-se escrever r//s e se lê r "é paralela a" s.

4. Considere uma reta r que tem a direção do vetor u e um ponto C, figura a seguir.
Ache a transformada de r pela simetria de centro C e indique por s.



Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



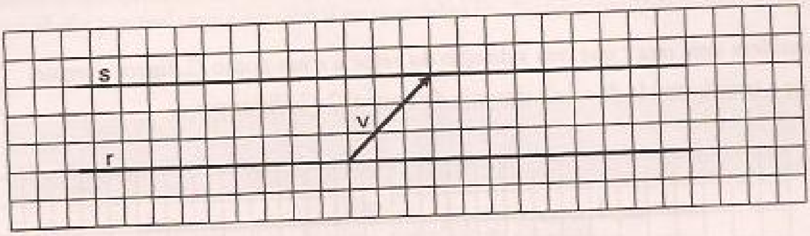
Na figura obtida os vetores u e -u têm a mesma direção. Assim, pela simetria de centro C a reta r foi transformada numa reta s paralela a r.
Nestas condições, pode-se afirmar que:

Uma simetria central transforma toda reta r numa reta s paralela a r.

Você pode verificar, também, que:

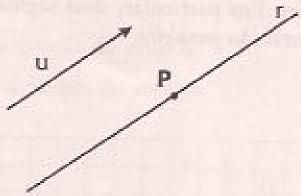
Uma translação transforma toda reta r numa reta s paralela a r.

Por exemplo, pela translação de vetor v a reta r é transformada na reta s paralela a r.



Ficha 9 SEMI-RETA E SEGMENTO

1. Considere uma reta r que tem a direção do vetor u e um ponto P de r, figura a seguir.



O ponto P divide a reta em dois conjuntos de pontos:

o conjunto formado por P *e por todos os pontos que seguem* P, no sentido do vetor u;

o conjunto formado por P *e por todos os pontos que precendem* P, no sentido do vetor -u.

Observe que o ponto P pertence aos dois conjuntos. Cada um destes conjuntos é chamado *semi-reta de origem* P.

Portanto, *qualquer ponto* P *de uma reta determina, nesta reta, duas semi-retas opostas de origem* P. Estas semi-retas são *simétricas* em relação a P.

Uma semi-reta fica determinada quando é dada a sua origem e outro ponto qualquer. Por exemplo, dados os pontos P e Q existe *uma só semi-reta de origem* P *à qual* Q *pertence.*

Se P é a origem de uma semi-reta e Q é outro ponto qualquer desta semi-reta ela é indicada por *semi-reta* PQ.

2. Considere, na figura a seguir, a semi-reta AB de origem A e a semi-reta BA de origem B. A interseção destas semi-retas é uma figura chamada *segmento* AB.

Os pontos A e B são chamados *extremos* do segmento AB e os pontos compreendidos entre A e B são chamados *pontos interiores.* O segmento de extremos A e B é indicado por $\overline{AB}$.

Observações: 1ª) Quando duas semi-retas estão contidas em retas paralelas diz-se que estas semi-retas são *paralelas.*

2ª) Quando dois segmentos estão contidos em retas paralelas diz-se que estes segmentos são *paralelos.*

3. Como você já viu, quando uma figura é obtida de outra por translação ou por simetria central, estas figuras são congruentes. Em particular, dois segmentos obtidos um do outro por translação ou por simetria central são congruentes. Neste caso, os segmentos têm a *mesma medida*; por isso, diz-se que eles são *iguais*.

4. Você já viu, também, que quando uma reta é obtida de outra por translação ou por simetria central estas retas são *paralelas*. Em particular, dois segmentos obtidos um do outro por translação ou por simetria central são *paralelos*.

Resolva os exercícios da página 48.

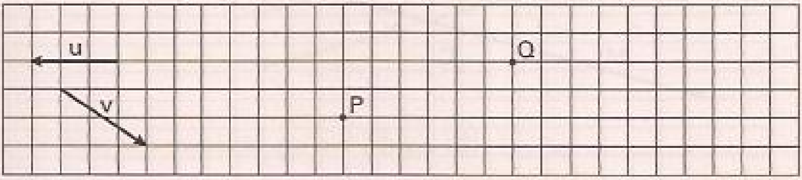
EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 7

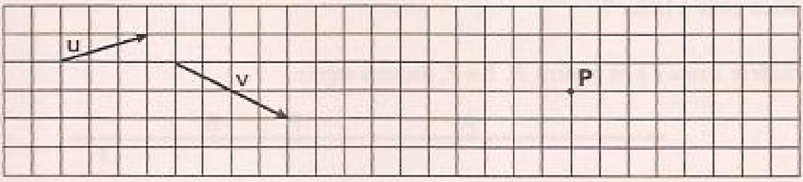
1. Ache, na figura a seguir:

   a) a reta que passa por P e tem a direção do vetor u

   b) a reta que passa por Q e tem a direção do vetor v



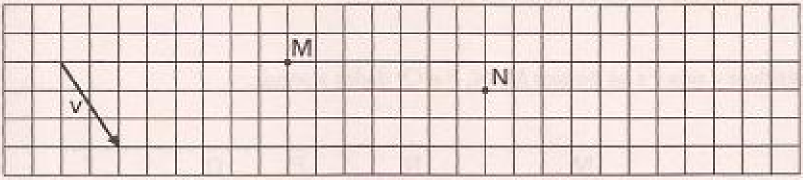
2. Dado o ponto P e os vetores u e v, figura a seguir, trace as retas Pu e Pv.



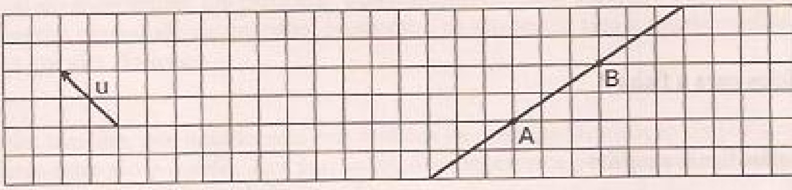
3. Ache, na figura a seguir:

   a) a reta r que passa por M e é paralela ao vetor v

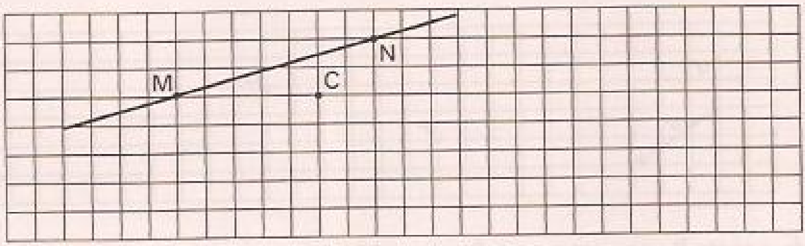
   b) a reta s que passa por N e é paralela ao vetor v



4. Ache a transformada da reta AB, dada a seguir, pela translação de vetor u.



5. Ache a transformada da reta MN, dada a seguir, pela simetria de centro C.



Exercícios para a ficha 9

1. Considere a reta r e os pontos A, B e P, dados a seguir:

Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

a) A interseção das semi-retas PB e PA, de mesma origem P, é o ponto P.

b) A união das semi-retas PB e PA, de mesma origem P, é a reta r.

c) A interseção da semi-reta AB com a semi-reta PB é a semi-reta PB.

d) A união da semi-reta AB com a semi-reta PB é a reta r.

e) A semi-reta PB está contida na semi-reta AB.

2. Considere a reta r e os pontos M, N, P e Q, dados a seguir.

Complete as afirmações seguintes, de modo que se tornem verdadeiras:

a) A interseção da semi-reta NP com a semi-reta PM é...

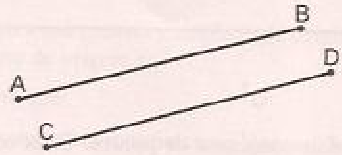
b) A interseção da semi-reta NP com o segmento MN é...

c) $\overline{MN} \cup \overline{NP} = \ldots$

d) $\overline{MN} \cap \overline{NP} = \{\ldots$

e) $\overline{MN} \cap \overline{PQ} = \ldots$

Considere os segmentos AB e CD congruentes e paralelos, dados a seguir.



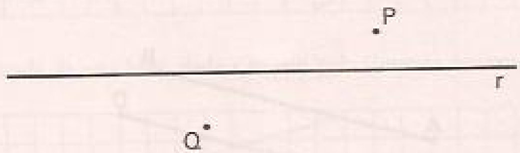
a) Diga se existe uma translação que leve $\overline{AB}$ em $\overline{CD}$. Em caso afirmativo, indique o vetor translação.

b) Diga se existe uma simetria central que leve $\overline{AB}$ em $\overline{CD}$. Em caso afirmativo, indique o centro de simetria.

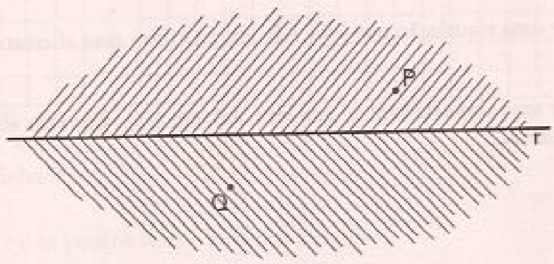
Ficha 10

SEMIPLANO

1. Considere, no plano, uma reta r e os pontos P e Q, figura a seguir.



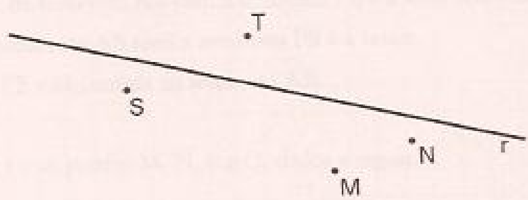
A reta r divide o plano em dois conjuntos de pontos. Estes conjuntos estão hachurados na figura a seguir.



Observe que o ponto P pertence a um dos conjuntos, o ponto Q pertence ao outro e a reta r está contida nos dois conjuntos. Cada um destes conjuntos é chamado *semiplano de origem* r.

Observação: Dois semiplanos de mesma origem dizem-se *opostos.*

2. Considere a reta r e os pontos M, N, S e T, figura a seguir.



a) Diga se os pontos M e N pertencem a um mesmo semiplano de origem r.
Resposta

Ligue os pontos M e N e diga se o segmento MN está contido num mesmo semiplano de origem r.
Resposta

Diga se os pontos S e T pertencem a um mesmo semiplano de origem r.
Resposta

Ligue os pontos S e T e diga se o segmento ST está contido num mesmo semiplano de origem r.
Resposta

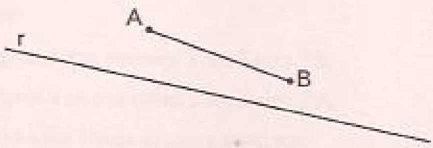
Você deve ter concluído que:

Os pontos M e N pertencem a um mesmo semiplano de origem r e o segmento MN está contido nesse semiplano.

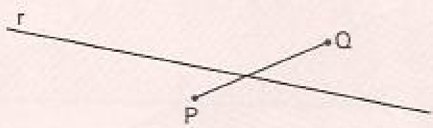
Os pontos S e T não pertencem a um mesmo semiplano de origem r e o segmento ST não está contido num mesmo semiplano de origem r.

Do que se viu acima, conclui-se que:

1º) Se dois pontos A e B pertencem a um mesmo semiplano, então o segmento AB está contido nesse semiplano.

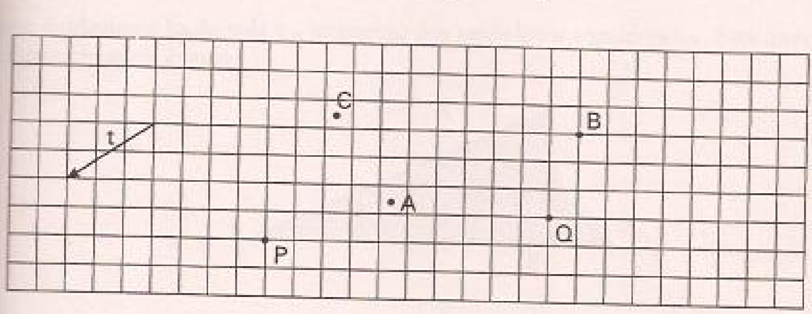


2º) Se dois pontos P e Q pertencem a semiplanos opostos, de origem r, então o segmento PQ tem um ponto em r.



Exercício

Considere o vetor t e os pontos A, B, C, P e Q, figura a seguir:



I) Trace na figura acima, a reta que passa por P e tem a direção do vetor t; indique essa reta por r.

II) Trace, na figura acima, a reta que passa por Q e tem a direção de t; indique essa reta por s.

Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

a) A reta r determina dois semiplanos.

b) A reta s está contida nos dois semiplanos de origem s.

c) A reta s está contida em um dos semiplanos de origem r.

d) Os pontos C e Q pertencem a um mesmo semiplano de origem r.

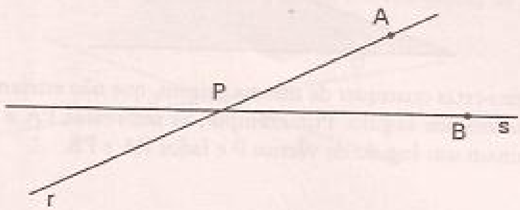
e) Os pontos A e Q estão em semiplanos opostos de origem s.

f) O segmento AP está contido num dos semiplanos de origem r.

g) Os pontos B e C pertencem a um mesmo semiplano de origem s.

Ficha 11 ÂNGULOS

1. Considere duas retas distintas r e s, não paralelas, e seja P o ponto de interseção dessas retas. Considere, ainda, um ponto A de r e um ponto B de s.

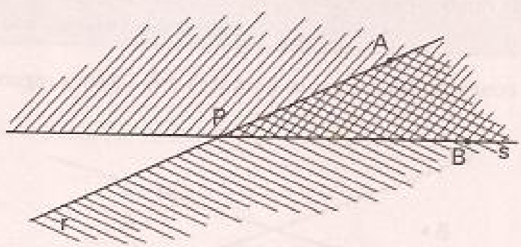


Na figura acima, hachure:

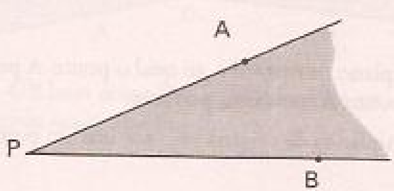
a) o semiplano de origem r que contém a semi-reta PB;

b) o semiplano de origem s que contém a semi-reta PA.

Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



A parte duplamente hachurada é a interseção dos semiplanos considerados. Esta interseção é uma figura chamada *ângulo*.

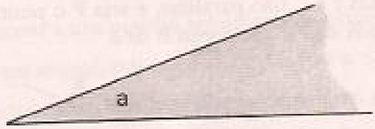


Na figura acima, as semi-retas PA e PB, de mesma origem P, são chamadas *lados* do ângulo e o ponto P é o *vértice* do ângulo.

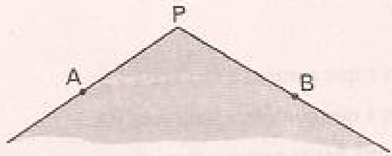
Os pontos do ângulo que não pertencem aos lados chamam-se *pontos interiores*.

Um ângulo de vértice P e lados PA e PB pode ser indicado por $A\hat{P}B$ ou $B\hat{P}A$, o que se lê "ângulo APB ou ângulo BPA". Este ângulo pode, também, ser indicado por $\hat{P}$.

Um ângulo pode, ainda, ser indicado por uma letra minúscula colocada no seu interior.

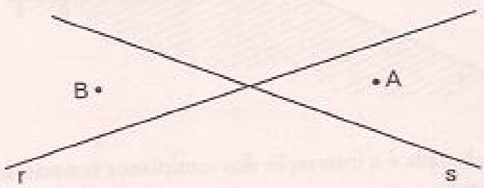


Observação: Duas semi-retas quaisquer de mesma origem, que não estejam numa mesma reta, determinam um ângulo. Por exemplo, as semi-retas PA e PB, dadas a seguir, determinam um ângulo de vértice P e lados PA e PB.



Exercício

Considere duas retas concorrentes, r e s, e os pontos A e B, figura a seguir:



I) Hachure:

a) A interseção do semiplano de origem r, ao qual o ponto A pertence, com o semiplano de origem s, ao qual o ponto A, também, pertence.

b) A interseção dos semiplanos de origens r e s aos quais o ponto B pertence.

II) Considere a figura que você obteve e complete:

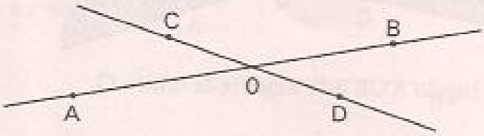
a) Cada parte hachurada é chamada...

b) As retas concorrentes r e s determinam quatro...

Ficha 12

ÂNGULOS: DEFINIÇÕES

1. Considere duas retas distintas AB e CD que se interceptam num ponto O. Como você já sabe, estas retas determinam quatro ângulos, AÔD, DÔB, BÔC e CÔA, de mesmo vértice O.



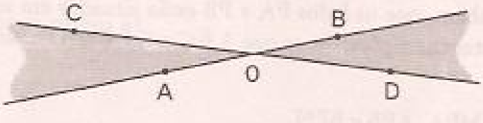
Observe que os ângulos AOD e DOB têm um lado comum, OD, e os lados não comuns, OA e OB são semi-retas opostas. Neste caso, diz-se que AÔD e DÔB são *ângulos suplementares*.

Definição

> Dois ângulos que têm um lado comum e os lados não comuns são semi-retas opostas, são chamados *ângulos suplementares*.

Observe a figura acima e indique os ângulos que são suplementares.
Resposta

2. Considere, na figura a seguir, os ângulos AOC e DOB de mesmo vértice O.



Observe que os lados OA e OB bem como OC e OD são semi-retas opostas. Neste caso, diz-se que AÔC e DÔB são *ângulos opostos pelo vértice*.

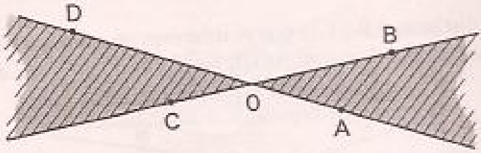
Definição

> Dois ângulos que têm o mesmo vértice e os lados são semi-retas opostas, são chamados *ângulos opostos pelo vértice*.

Observe a figura acima e indique os ângulos opostos pelo vértice.

Resposta

3. Considere dois ângulos opostos pelo vértice, AÔB e CÔD



Diga qual é o simétrico do ângulo AOB pela simetria de centro O.

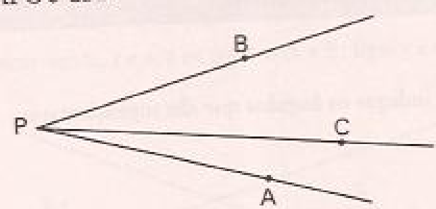
Resposta

Você deve ter concluído que CÔD é o simétrico de AÔB pela simetria de centro O. Logo, os ângulos opostos pelo vértice AÔB e CÔD são congruentes.

Portanto,

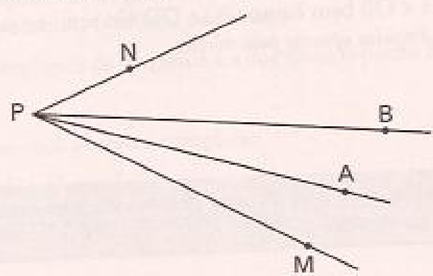
Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.

4. Considere os ângulos APC e CPB.



Observe que estes ângulos têm o mesmo vértice, P, e que o lado PC é lado comum aos dois ângulos. Observe, também, que os lados PA e PB estão situados em semiplanos opostos em relação à reta PC. Nestas condições, diz-se que A P̂ C e C P̂ B são *ângulos adjacentes*.

5. Considere os ângulos MPA, APB e BPN.



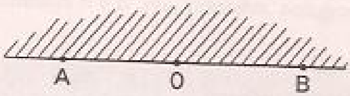
Observe que estes ângulos têm o mesmo vértice P.

O ângulo MPA é adjacente ao ângulo APB e o ângulo APB é adjacente ao ângulo BPN.

Nestas condições, diz-se que $M\hat{P}A$, $A\hat{P}B$ e $B\hat{P}N$ são *ângulos consecutivos*.

6. Como você já viu, o ângulo foi definido como interseção de dois semiplanos cujas origens são duas retas não paralelas. Pode-se, também, considerar o caso em que os dois lados do ângulo coincidem. Neste caso, diz-se que o ângulo é um *ângulo nulo*. Por exemplo, o ângulo AOB, figura a seguir, é nulo.

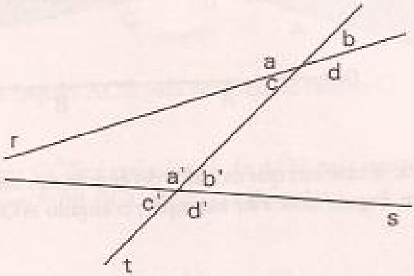
Pode-se, ainda, considerar o caso em que os lados do ângulo são semi-retas opostas. Neste caso, diz-se que o ângulo é um *ângulo raso*. Por exemplo, o ângulo AOB, figura a seguir, é raso.



Resolva os exercícios da página 61.

Ficha 13 ÂNGULOS: PROPRIEDADES

1. Considere duas retas distintas r e s e uma reta t que corte as retas r e s. A reta t forma com as retas r e s oito ângulos: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{a}', \hat{b}', \hat{c}'$ e $\hat{d}'$.



A reta t é chamada *transversal*

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}'$ e $\hat{d}'$ são chamados *ângulos externos*

$\hat{c}, \hat{d}, \hat{a}'$ e $\hat{b}'$ são chamados de *ângulos internos*

$\hat{a}$ e $\hat{d}'$ bem como $\hat{b}$ e $\hat{c}'$ são chamados *ângulos alternos externos*

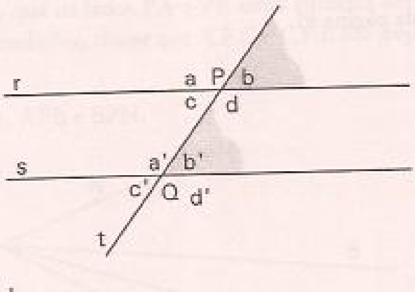
$\hat{c}$ e $\hat{b}'$ bem como $\hat{d}$ e $\hat{a}'$ são chamados *ângulos alternos internos*

$\hat{a}$ e $\hat{c}'$ bem como $\hat{b}$ e $\hat{d}'$ são chamados *ângulos externos do mesmo lado*

$\hat{c}$ e $\hat{a}'$ bem como $\hat{d}$ e $\hat{b}'$ são chamados *ângulos internos do mesmo lado*

$\hat{a}$ e $\hat{a}'$ bem como $\hat{b}$ e $\hat{b}'$, $\hat{c}$ e $\hat{c}'$, $\hat{d}$ e $\hat{d}'$ são chamados *ângulos correspondentes*

2. Considere, agora, duas retas paralelas distintas r e s e uma transversal t, que corte as retas r e s nos pontos P e Q, respectivamente.



Dê os ângulos correspondentes.

Resposta

Considere os ângulos correspondentes b e b'. Observe que os ângulos b e b' são congruentes porque o ângulo b pode ser obtido do ângulo b' pela translação de vetor QP.

Diga se os ângulos correspondentes a e a' são congruentes.
Resposta

Por que?
Resposta

Diga se os ângulos correspondentes c e c' são congruentes.
Resposta

Por que?
Resposta

Diga se os ângulos correspondentes d e d' são congruentes.
Resposta

Por que?
Resposta

Você deve ter concluído que os ângulos correspondentes a e a' são congruentes pois o ângulo a é obtido do ângulo a' pela translação de vetor QP. Você deve ter concluído, também, que os ângulos correspondentes c e c', bem como d e d', são congruentes, pela translação de vetor QP.

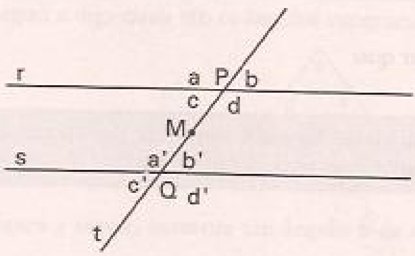
Como os ângulos correspondentes b e b' são, também, congruentes, pode-se afirmar que:

Duas retas paralelas distintas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes congruentes.

Pode-se, também, afirmar que:

Se duas retas distintas formam com uma transversal ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são paralelas.

3. Considere, novamente, as retas paralelas distintas r e s, a transversal t e o ponto médio, M, do segmento PQ.



Dê os ângulos alternos internos.
Resposta

Considere os ângulos alternos internos d e a'.

Observe que os ângulos d e a' são congruentes porque o ângulo a' pode ser obtido do ângulo d pela simetria de centro M.

Diga se os ângulos alternos internos c e b' são congruentes.
Resposta

Por que?
Resposta

Você deve ter concluído que os ângulos alternos internos c e b' são congruentes pela simetria de centro M. Como os ângulos alternos internos d e a' são, também, congruentes, pode-se afirmar que:

> Duas retas paralelas distintas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes.

Pode-se, também, afirmar que:

> Se duas retas distintas formam com uma transversal ângulos alternos internos congruentes, então essas retas são paralelas.

4. Volte a considerar a figura acima e complete:

Os ângulos alternos externos a e d' são congruentes porque...

Os ângulos alternos externos b e c' são congruentes porque...

Pode-se afirmar que:

> Duas retas paralelas distintas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos externos congruentes.

Pode-se, também, afirmar que:

> Se duas retas distintas formam com uma transversal ângulos alternos externos congruentes, então essas retas são paralelas.

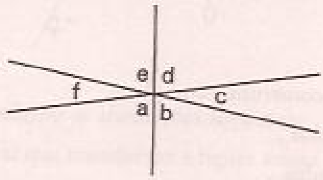
Resolva os exercícios da página 62.

EXERCÍCIOS

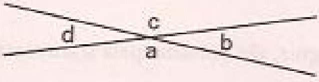
Exercícios para a ficha 12

1. Dado o ângulo m, figura a seguir, construa um ângulo n de modo que m e n sejam ângulos suplementares.

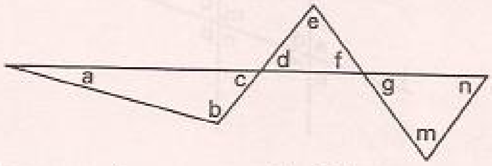
2. Observe a figura seguinte e dê os ângulos opostos pelo vértice.



3. Observe a figura a seguir e complete:
   a) Os ângulos a e ... são opostos pelo vértice.
   b) Os ângulos d e ... são suplementares.



4. Observe a figura a seguir e diga quais são os ângulos congruentes. Justifique sua resposta.



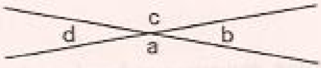
5. Dado o ângulo a, figura a seguir, construa um ângulo b de modo que a e b sejam ângulos adjacentes.

6. Considere a figura a seguir e complete:

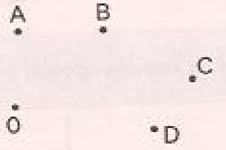
a) Os ângulos a e ... são adjacentes.

b) Os ângulos a,... e ... são consecutivos

c) Os ângulos a, b,... e ... são consecutivos.



7. Considere os pontos O, A, B, C e D, dados a seguir, e trace as semi-retas OA, OB, OC e OD.



Observe a figura que você construiu e complete:

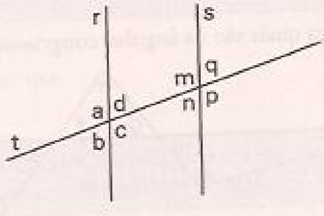
a) AÔB e BÔC são ângulos...

b) DÔC e CÔB são ângulos...

c)AÔB, BÔC, CÔD são ângulos...

Exercícios para a ficha 13

1. As retas paralelas r e s, dadas a seguir, são cortadas pela transversal t.



Indique:

a) Os ângulos correspondentes.

b) Os ângulos alternos internos.

c) Os ângulos alternos externos.

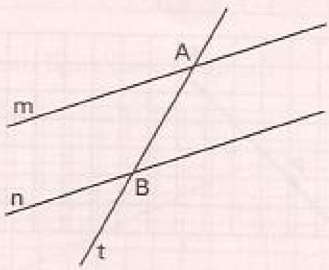
Complete:

d) Os ângulos a e m são congruentes porque são ângulos...

e) Os ângulos c e m são congruentes porque são ângulos...

f) Os ângulos b e q são congruentes porque são ângulos...

2. Sejam m e n duas retas paralelas cortadas por uma transversal t.



Diga, justificando, se são verdadeiras as afirmações seguintes:

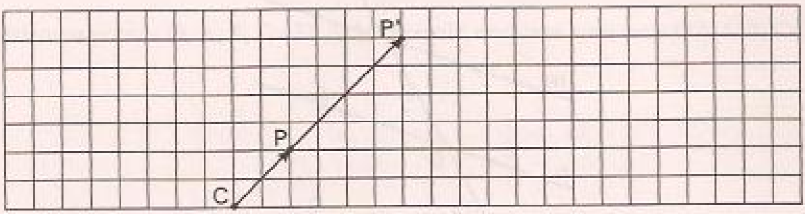
a) Existe uma simetria central que transforma a figura acima em si mesma.

b) Existe uma translação de vetor não nulo que transforma a figura acima em si mesma.

Ficha 14 HOMOTETIA

1. Considere um ponto C, fixo, do plano, o número real 3 e a relação que a um ponto P do plano faz corresponder um ponto P' tal que o vetor CP' seja igual ao vetor 3CP, isto é,

$$\overrightarrow{CP'} = 3\overrightarrow{CP}$$



A relação considerada que leva P em P' tal que

$$\overrightarrow{CP'} = 3\overrightarrow{CP}$$

é chamada *homotetia de centro* C *e razão 3*. O ponto P' é chamado *homotético* de P.

Observe que *os pontos* C, P *e* P' *estão numa mesma reta*, isto é, *estão alinhados*. Observe, também, que *os pontos* P *e* P' *estão numa mesma semi-reta de origem* C.

Observe, ainda, que para os segmentos CP' e CP tem-se

$$\overline{CP'} = 3\overline{CP}$$

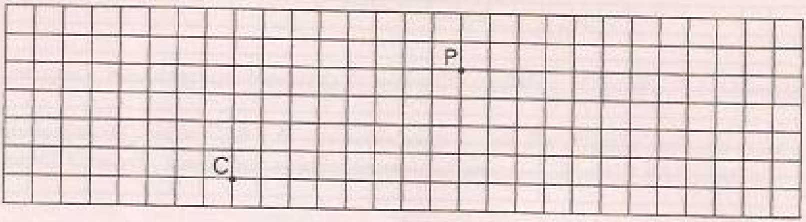
$$\text{e } \frac{\overline{CP'}}{\overline{CP}} = 3$$

donde se conclui que a razão entre os segmentos CP' e CP é 3.

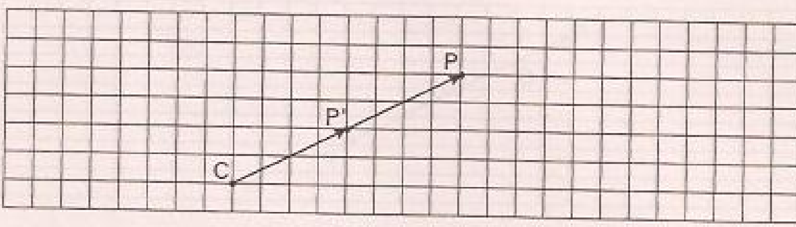
2. Considere, novamente, um ponto C, fixo, do plano, o número real 1/2 e a relação que a um ponto P do plano faz corresponder um ponto P' tal que o vetor CP' seja igual a um meio do vetor CP, isto é,

$$\overrightarrow{CP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$$

Indique, na figura a seguir, o vetor CP e ache o ponto P'.



Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



A relação considerada, que leva P em P' tal que

$$\overrightarrow{CP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$$

é chamada *homotetia de centro* C *e razão 1/2.* O ponto P' é chamado *homotético* de P.

Observe que *os pontos* C, P *e* P' *estão alinhados* e que P *e* P' *estão numa mesma semi-reta de origem* C.

Observe, também, que para os segmentos CP' e CP tem-se

$$\overline{CP'} = \frac{1}{2}\overline{CP}$$

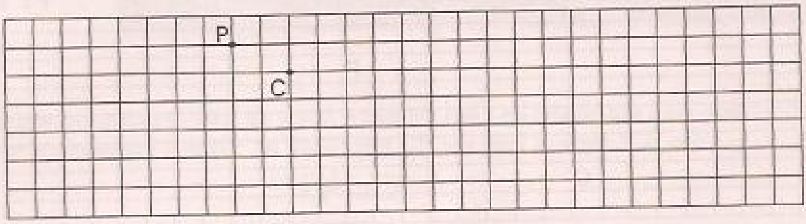
$$\text{e} \ \frac{\overline{CP'}}{\overline{CP}} = \frac{1}{2}$$

donde se conclui que a razão entre os segmentos CP' e CP é $\frac{1}{2}$.

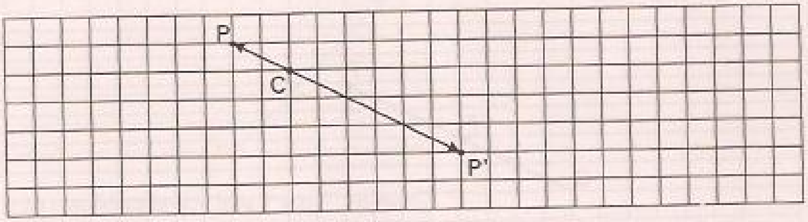
3. Considere, agora, um ponto C, fixo, do plano, o número real -3 e a relação que a um ponto P do plano faz corresponder um ponto P' tal que

$$\overrightarrow{CP'} = -3\overrightarrow{CP}$$

Indique, na figura a seguir, o vetor CP e ache o ponto P'.



Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



A relação considerada, que leva P em P' tal que

$$\overrightarrow{CP'} = -3\overrightarrow{CP}$$

é chamada *homotétia de centro* C *e razão* -3. O ponto P' é chamado *homotético* de P.

Observe que *os pontos* C,P *e* P' *estão alinhados* e que P *e* P' *estão em semi-retas opostas de origem* C.

Observe, também, que para os segmentos CP' e CP tem-se

$$\overline{CP'} = 3\overline{CP}$$

$$\text{e } \frac{\overline{CP'}}{\overline{CP}} = 3$$

donde se conclui que a razão entre os segmentos CP' e CP é 3. Observe que 3 é o valor absoluto da razão de homotetia, -3.

4. Considere, agora, um ponto C, fixo, do plano, o número real $-\frac{1}{4}$ e a relação que a um ponto P do plano faz corresponder um ponto P' tal que

$$\overrightarrow{CP'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{CP}$$

Essa relação é, também, uma *homotetia de centro C e razão* $-\frac{1}{4}$. O ponto P' é o *homotético* de P.

Observe que *os pontos C, P e P' estão alinhados* e que *P e P' estão em semi-retas opostas de origem C*. Observe, ainda, que a razão entre os segmentos CP' e CP é 1/4, isto é,

$$\frac{\overline{CP'}}{\overline{CP}} = \frac{1}{4}$$

Ficha 15 HOMOTETIA

1. Como você viu, na ficha anterior, foram consideradas as seguintes relações:

homotetia de centro C e razão 3, no item 1.

homotetia de centro C e razão 1/2, no item 2.

homotetia de centro C e razão -3, no item 3.

homotetia de centro C e razão $-\frac{1}{4}$, no item 4.

Observe que nestes exemplos foram consideradas homotetias cujas razões são números racionais. Podem ser consideradas, também, homotetias cujas razões são números irracionais.

Definição

Dados um ponto C, fixo, do plano e um número real k diferente de zero, chama-se *homotetia de centro* C *e razão* k a relação que leva um ponto P qualquer do plano num ponto P' tal que

$$\overrightarrow{CP'} = k\overrightarrow{CP}$$

O ponto P' é chamado *homotético* de P.

Uma homotetia de centro C e razão $k \neq 0$ é uma *transformação geométrica*.

Observações: 1ª) Se $k > 0$, os pontos P e P' estão numa mesma semi-reta de origem C.

2ª) Se $k < 0$, os pontos P e P' estão em semi-retas opostas de origem C.

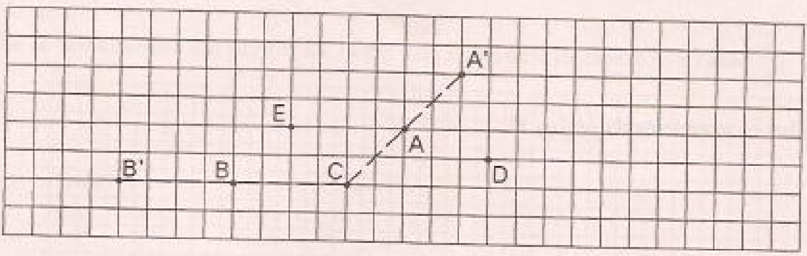
3ª) Se $k = -1$, a homotetia é uma simetria de centro C pois $\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$

4ª) Se $k = 1$, a homotetia é a translação identidade pois $\overrightarrow{CP'} = \overrightarrow{CP}$ e, portanto, $P' = P$.

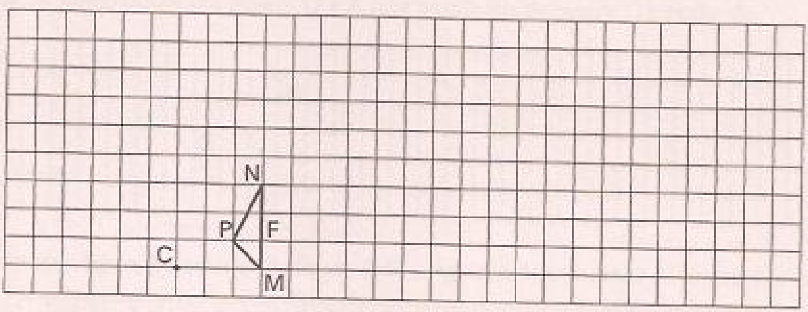
5ª) Se P' é o homotético de um ponto P pela homotetia de centro C e razão k, então $\frac{\overline{CP'}}{\overline{CP}} = |k|$

2. Na figura a seguir, o ponto A' é o homotético do ponto A pela homotetia de centro C e razão 2; o ponto B' é o homotético de B pela mesma homotetia.

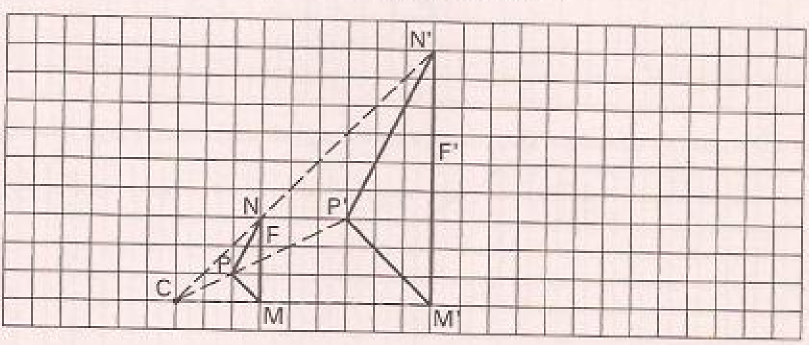
Ache os homotéticos dos pontos D e E pela homotetia de centro C e razão 2.



3. Considere uma figura F e um ponto C, dados a seguir, e ache os homotéticos dos pontos M, N e P pela homotetia de centro C e razão 3. Ligue os pontos obtidos.



Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte, onde F é levada na figura F' cujos pontos são os homotéticos dos pontos correspondentes de F.



A figura F' obtida de F pela homotetia de centro C e razão 3 é chamada *homotética* da figura F.

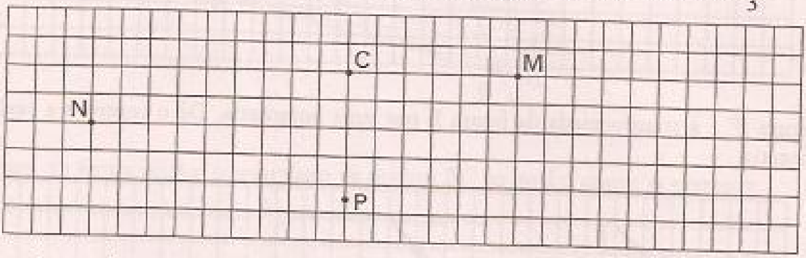
Portanto, dada uma figura F qualquer e uma homotetia de centro C e razão $k \neq 0$, F é levada, por esta homotetia, numa figura F' cujos pontos são os homotéticos dos pontos correspondentes de F.

Resolva os exercícios da página 71.

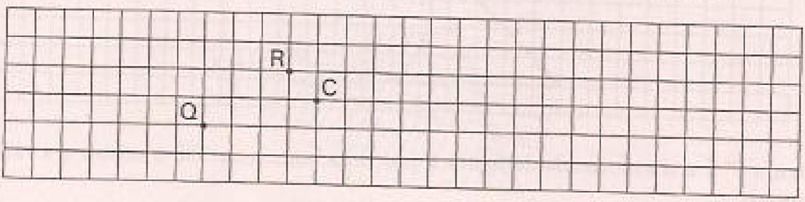
EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 15

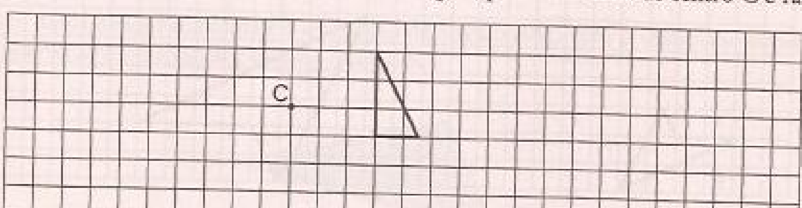
1. Ache os homotéticos dos pontos M, N e P pela homotetia de centro C e razão $\frac{1}{3}$.



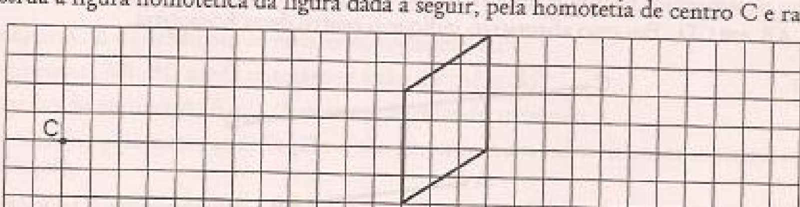
2. Ache os homotéticos dos pontos Q e R pela homotetia de centro C e razão -2.



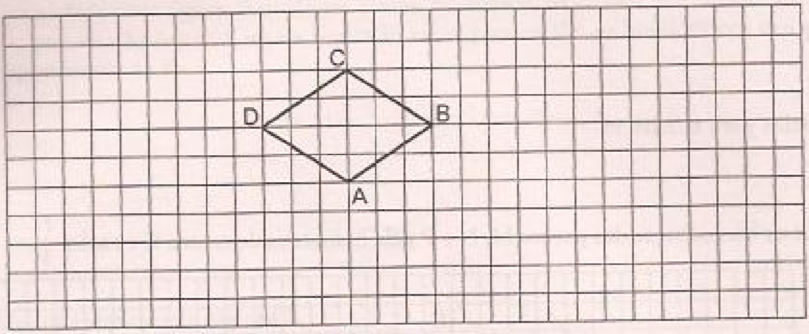
3. Construa a figura homotética da figura dada a seguir, pela homotetia de centro C e razão -2.



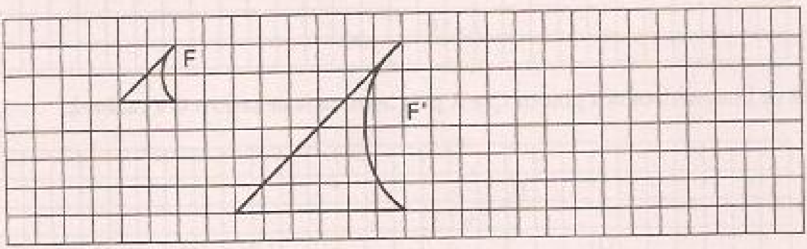
4. Construa a figura homotética da figura dada a seguir, pela homotetia de centro C e razão $\frac{1}{3}$.



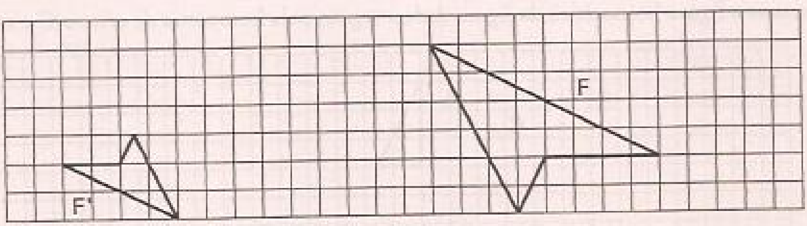
5. Construa a figura homotética da figura a seguir pela homotetia de centro C e razão 2.



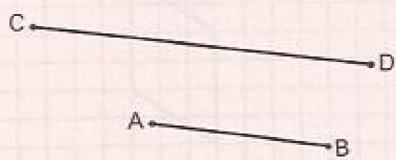
6. A figura F' é a transformada da figura F por uma homotetia. Dê o centro e a razão dessa homotetia.



7. A figura F' é a transformada da figura F por uma homotetia. Dê o centro e a razão dessa homotetia.



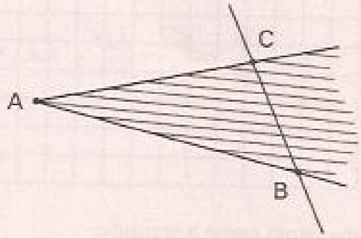
8. Dados os segmentos paralelos AB e CD, figura a seguir, verifique se existe uma homotetia que leve $\overline{AB}$ em $\overline{CD}$. Em caso afirmativo indique o centro dessa homotetia.



Ficha 16

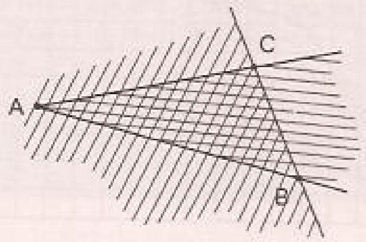
TRIÂNGULO

1. Considere um ângulo BAC e a reta BC, figura a seguir.

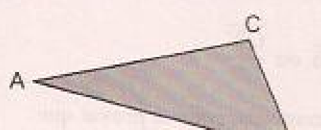


Hachure, na figura acima, o semiplano de origem BC ao qual o ponto A pertence.

Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



A parte duplamente hachurada é a interseção do ângulo BAC com o semiplano considerado. Esta interseção é uma figura chamada *triângulo*.



Os pontos A, B e C chamam-se *vértices* do triângulo ABC.

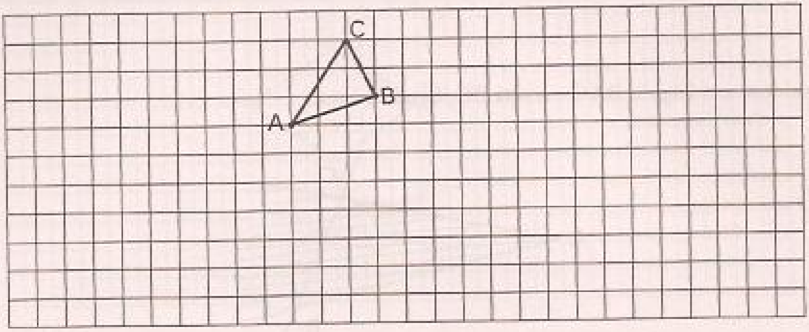
Os segmentos AB, BC e AC chamam-se *lados* do triângulo.

Os ângulos de vértices A, B e C chamam-se *ângulos* do triângulo.

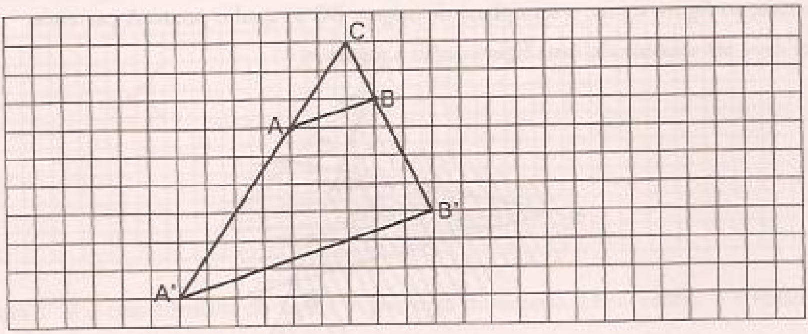
Os pontos que pertencem ao triângulo e não pertencem aos lados chamam-se *pontos interiores* do triângulo.

Observação: Os ângulos de vértices A, B e C são, também, chamados *ângulos internos* do triângulo.

2. Considere um triângulo ABC, figura a seguir, e construa o homotético deste triângulo pela homotetia de centro C e razão 3.



Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



Como o triângulo A'B'C é o homotético do triângulo ABC, tem-se

$$\overline{CA'} = 3\overline{CA} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = 3$$

$$\overline{CB'} = 3\overline{CB} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = 3$$

Observando a figura que você construiu, pode-se provar que

$$\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{AB}$$

o que mostra que

$$\overrightarrow{A'B'} // \overrightarrow{AB}$$

e, portanto,

$$\overline{A'B'} // \overline{AB}$$

Além disso, tem-se que

$$\overline{A'B'} = 3\overline{AB} \text{ ou } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 3$$

Do que se viu acima, tem-se que a homotetia de centro C e razão 3 leva o triângulo ABC no triângulo A'B'C tal que

$$\overline{A'B'} // \overline{AB} \text{ e } \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 3$$

donde se conclui a seguinte

Propriedade

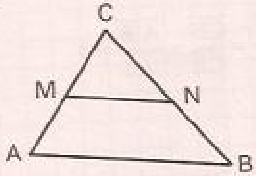
> Dado um triângulo ABC qualquer, por uma homotetia de centro C e razão $k \neq 0$, obtém-se um triângulo homotético A'B'C tal que
>
> $\overline{A'B'} // \overline{AB}$
>
> e $\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |k|$

Observação: As igualdades acima mostram que dois triângulos homotéticos têm os lados proporcionais.

Ficha 17

TRIÂNGULO: PROPRIEDADES

1. Considere um triângulo ABC, figura a seguir, onde M é o ponto médio do lado AC e N o ponto médio do lado BC.



Observe que

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

e $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

o que mostra que M é o homotético de A e N é o homotético de B pela homotetia de centro C e razão 1/2. Portanto, os triângulos ABC e MNC são homotéticos e, pela propriedade da ficha anterior, pode-se escrever

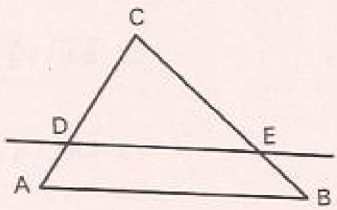
$$\overline{MN} // \overline{AB} \text{ e } \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB},$$

donde se conclui a seguinte

Propriedade 1

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

2. Considere um triângulo ABC e uma reta DE, paralela ao lado AB, que intercepta os outros dois lados.



Considere a homotetia de centro C que leva o ponto A no ponto D. Esta homotetia leva a reta AB numa reta r, paralela a AB, passando pelo ponto D.

Pelo postulado de Euclides a reta r coincide com a reta DE que é paralela ao lado AB.

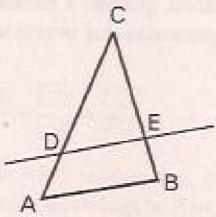
Nestas condições, o ponto E é o homotético do ponto B pela homotetia considerada. Portanto, o triângulo CDE é o homotético do triângulo CAB, donde se conclui a seguinte

Propriedade 2

> Toda **paralela a um dos** lados de um **triângulo**, que intercepta os outros **dois lados**, determina **um triângulo** homotético ao primeiro.

Observação: A propriedade 2 é, também, válida quando a paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os prolongamentos dos outros dois lados.

3. Considere um triângulo ABC e uma reta DE, paralela ao lado AB, que intercepta os outros dois lados.



Observe que, pela propriedade 2, o triângulo CDE é homotético do triângulo CAB. Assim, pela propriedade da ficha anterior, tem-se

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}$$

$$\text{ou } \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}}$$

Aplicando a esta última igualdade, propriedade das proporções, complete:

$$\frac{\overline{CA} - \overline{CD}}{\overline{CD}} = \frac{\quad}{\overline{CE}}$$

$$\text{ou } \frac{\quad}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EB}}{\quad}$$

Você deve ter concluído que

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{CE}}$$

o que mostra que a reta DE determina sobre os lados AC e BC segmentos proporcionais.

Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 3

> Toda paralela a um dos lados de um triângulo, que intercepta os outros dois lados , determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

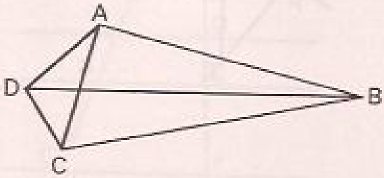
Observação: A propriedade 3 é, também, válida quando a paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os prolongamentos dos outros dois lados.

Resolva os exercícios da página 79.

EXERCÍCIOS

Exercícios para as fichas 16 e 17

1. Diga quantos triângulos contém a figura seguinte:

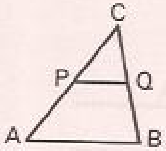


2. Considere dois triângulos homotéticos CAB e CA'B' tais que $\overline{A'B'} = 4\,\overline{AB}$. Dê a razão de homotetia e complete:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \dots$$

3. Os lados de um triângulo ABC medem 8m, 10m e 12m. Ache as medidas dos lados de um triângulo AB'C', homotético ao triângulo ABC, sabendo que a razão de homotetia é 1/2.

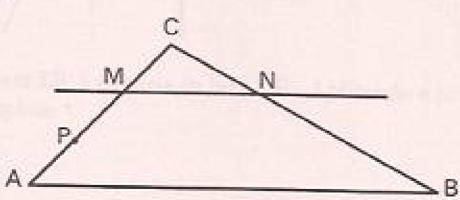
4. Na figura a seguir, P e Q são os pontos médios dos lados AC e BC do triângulo ABC e $\overline{AB} = 8$m. Complete: $\overline{PQ} = \dots$



5. Na figura a seguir MN é uma reta paralela ao lado AB do triângulo ABC, P é o ponto médio de $\overline{AM}$ e M é o ponto médio de $\overline{PC}$.
Complete:

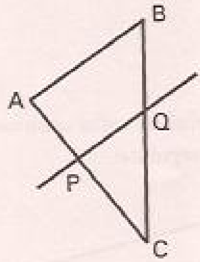
a) $\overline{CA} = \cdots\overline{CM}$

b) $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CN}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \dots$



6. Na figura seguinte, PQ é uma reta paralela ao lado AB do triângulo ABC; $\overline{BC} = 5m$ e $\overline{BQ} = 2m$.

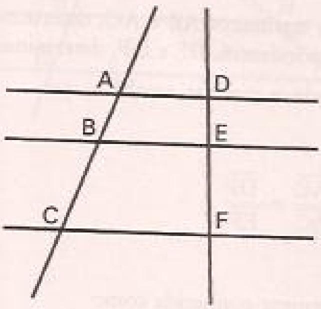
Dê o valor de $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CP}}$



Ficha 18

TEOREMA DE TALES

1. Considere três retas paralelas cortadas por duas transversais, AC e DF.



Considere, na transversal AC, os segmentos AB e AC.

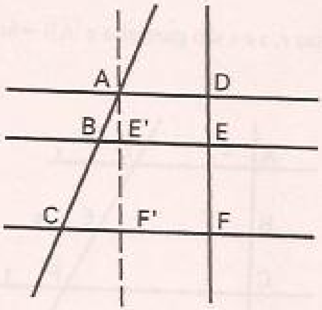
O segmento correspondente a $\overline{AB}$, na transversal DF, é $\overline{DE}$. Diga qual é o segmento correspondente a $\overline{AC}$, na transversal DF.

Resposta

Considere, agora, a translação de vetor DA.

Ache, na figura acima, os transformados dos pontos D, E e F por esta translação e ligue estes transformados.

Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



Observe que no triângulo ACF' a reta BE' é paralela ao lado CF'. Aplicando a propriedade 3 da ficha 17 ao triângulo ACF', complete:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{}}{\overline{AF'}}$$

Observe que pela translação de vetor DA, tem-se

$\overline{AE'} = \overline{DE}$ e $\overline{AF'} = \overline{DF}$,

donde

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$$

o que mostra que a razão entre os segmentos AB e AC, determinados na transversal AC, é igual à razão dos segmentos correspondentes, DE e DF, determinados na transversal DF.

Procedendo como se fez acima, pode-se mostrar, também, que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$$

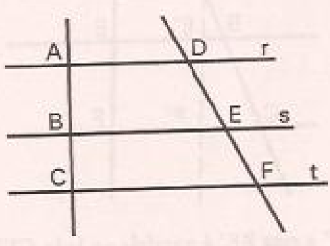
portanto, tem-se a propriedade seguinte conhecida como

Teorema de Tales

> Se três paralelas são cortadas por duas transversais, a razão de dois segmentos quaisquer determinados pelas paralelas, em uma dessas retas, é igual à razão dos segmentos correspondentes determinados na outra.

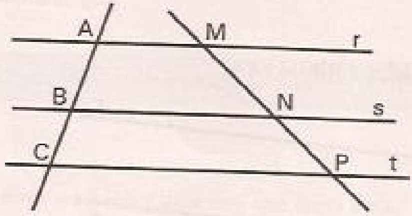
Exercícios

1º) Na figura a seguir, as retas r, s e t são paralelas e $\overline{AB} = 6$cm, $\overline{BC} = 5$cm, $\overline{DE} = 7{,}5$cm. Diga quanto mede $\overline{EF}$.



Resposta

2º) Na figura a seguir as retas r, s e t são paralelas; $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{2}$ e $\overline{MN} = 9cm$. Diga quanto mede $\overline{NP}$.

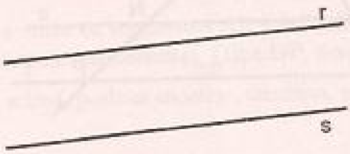


Resposta

Resolva os exercícios da página 93.

Ficha 19 FAIXA E SEMIFAIXA; PARALELOGRAMO

1. Considere duas retas paralelas distintas r e s.

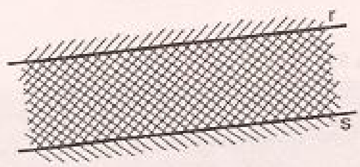


Na figura acima, hachure:

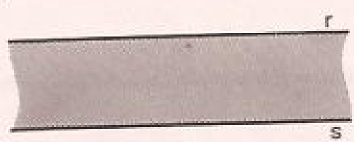
a) o semiplano de origem r que contém a reta s;

b) o semiplano de origem s que contém a reta r.

Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



A parte duplamente hachurada é a interseção dos semiplanos considerados. Esta interseção é uma figura chamada *faixa*.

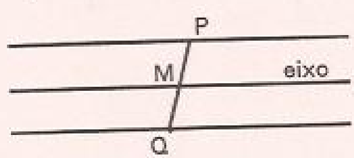


As retas r e s são chamadas *lados* da faixa.

Os pontos da faixa que não pertencem aos lados chamam-se *pontos interiores*.

2. Na figura a seguir P e Q são pontos dos lados de uma faixa e M é o ponto médio do segmento PQ.

A reta que passa por M e é paralela aos lados da faixa chama-se *eixo* da faixa.



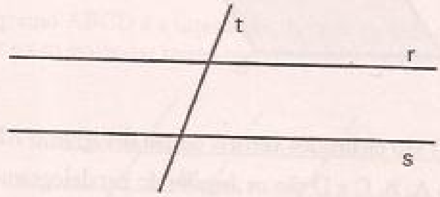
Se um segmento tem os seus extremos nos dois lados de uma faixa, pode-se afirmar que o ponto médio deste segmento pertence ao eixo da faixa.

Você pode verificar que o ponto M, ponto médio do segmento PQ, é centro de simetria da faixa.

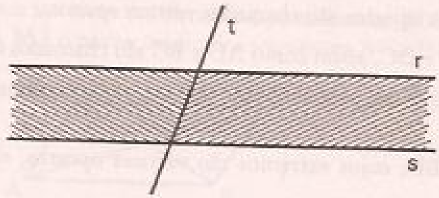
Das afirmações acima, conclui-se que:

Numa faixa, todo ponto do eixo é *centro de simetria* da figura.

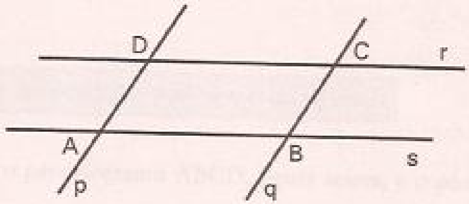
3. Considere uma faixa de lados r e s e seja t uma reta que corta r e s.



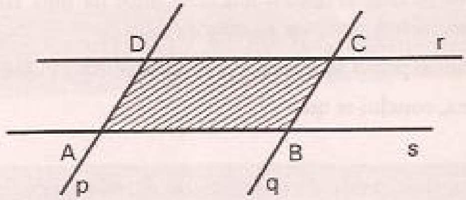
A reta t divide a faixa em duas partes. Cada uma destas partes é chamada *semifaixa*. As duas semifaixas estão hachuradas na figura a seguir.



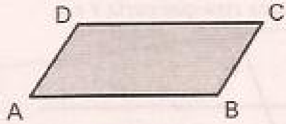
4. Considere uma faixa de lados r e s e outra faixa de lados p e q não paralelos a r e s; sejam A, B, C e D as interseções dos lados de uma faixa com os lados da outra.



Hachure, na figura acima, a interseção das duas faixas. Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



A interseção das faixas consideradas é uma figura chamada *paralelogramo*.



Os pontos A, B, C e D são chamados *vértices* do paralelogramo ABCD.

Os ângulos de vértices A, B, C e D são os *ângulos* do paralelogramo.

Os segmentos AB, BC, CD e DA são chamados *lados* do paralelogramo.

Os ângulos A e C são chamados *ângulos opostos*. Os ângulos B e D são, também, *ângulos opostos*.

Os vértices dos ângulos opostos são chamados *vértices opostos*.

Os lados paralelos AB e DC, assim como AD e BC são chamados *lados opostos*.

Dois lados não opostos de um paralelogramo têm um vértice comum e, por isso, são chamados *lados consecutivos*.

Os segmentos AC e BD, cujos extremos são vértices opostos, são chamados *diagonais* do paralelogramo.

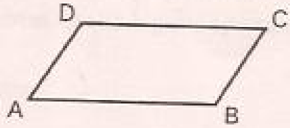
Os pontos do paralelogramo que não pertencem aos lados são chamados *pontos interiores*.

Resolva os exercícios da página 93.

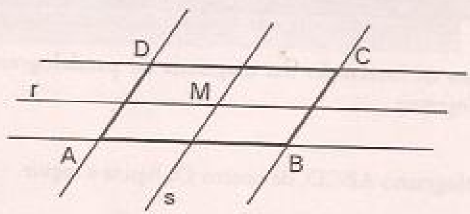
Ficha 20

PARALELOGRAMO: PROPRIEDADES

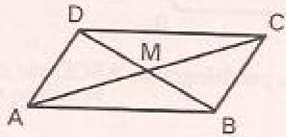
1. Considere um paralelogramo ABCD, figura a seguir:



Observe que o paralelogramo ABCD é a interseção da faixa de lados AB e DC com a faixa de lados AD e BC. Sejam r e s os eixos das faixas consideradas e seja M a interseção desses eixos.



Como o ponto M pertence aos eixos das duas faixas consideradas, M é centro de simetria dessas faixas. Nestas condições, M é o ponto médio dos segmentos AC e DB que são as diagonais do paralelogramo ABCD.



Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 1

As diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

2. Considere, novamente, o paralelogramo ABCD, figura acima, e o ponto M, interseção das diagonais AC e BD.

Diga qual é o transformado do lado AB pela simetria de centro M.

Resposta

Diga qual é o transformado do lado DC pela simetria de centro M.

Resposta

Dê os transformados dos lados AD e BC pela simetria de centro M.

Resposta

Você deve ter concluído que os lados AB e DC são simétricos em relação ao ponto M. O mesmo acontece com os lados AD e BC. Portanto, o paralelogramo ABCD se transforma em si mesmo pela simetria de centro M.

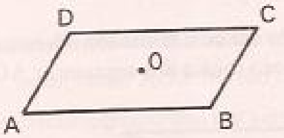
Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 2

O paralelogramo é uma figura simétrica em relação à interseção das diagonais.

Observação: O ponto de interseção das diagonais do paralelogramo é chamado *centro do paralelogramo*.

3. Considere um paralelogramo ABCD, de centro O, figura a seguir.



Diga se os lados opostos, AB e DC, do paralelogramo ABCD são congruentes.

Resposta

Por que?

Resposta

Você deve ter concluído que os lados opostos AB e DC são congruentes porque são simétricos em relação ao ponto O.

Você pode concluir, também, que os lados opostos, AD e BC, do paralelogramo ABCD são congruentes.

Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 3

Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

4. Considere, novamente, o paralelogramo ABCD de centro O, figura acima, e sejam $A\hat{B}C$ e $C\hat{D}A$ dois ângulos opostos desse paralelogramo.

Dê o transformado do ângulo ABC pela simetria de centro O.

Resposta

Você deve ter verificado que o transformado do ângulo ABC pela simetria de centro O é o ângulo CDA. Portanto, os ângulos opostos ABC e CDA são congruentes.

Você pode verificar, também, que os ângulos opostos, BCD e DAB, do paralelogramo ABCD são congruentes.

Portanto, tem-se a seguinte

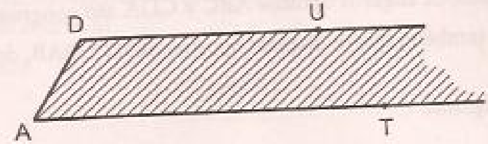
Propriedade 4

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

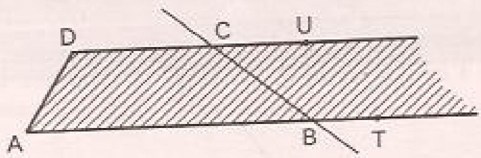
Resolva os exercícios da página 94.

Ficha 21 TRAPÉZIO

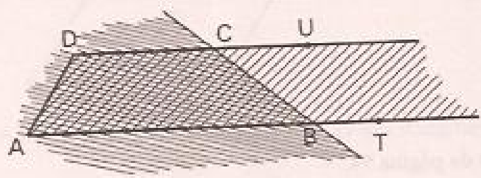
1. Considere uma semifaixa cujos lados paralelos são as semi-retas AT e DU.



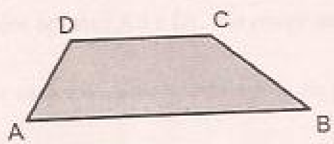
Considere, ainda, uma reta BC não paralela ao lado AD e que intercepta os lados paralelos AT e DU nos pontos B e C, respectivamente.



Hachure, na figura acima, a interseção da semifaixa considerada com o semiplano de origem BC que contém lado AD. Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



A parte duplamente hachurada é a interseção da semifaixa considerada com o semiplano de origem BC, que contém o lado AD. Esta interseção é uma figura chamada *trapézio*.



Os segmentos AB, BC, CD e DA são chamados *lados* do trapézio.

Os lados paralelos AB e DC são chamados *bases* do trapézio.

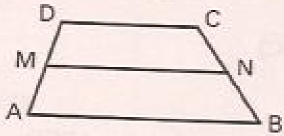
Os pontos A, B, C e D dizem-se *vértices* do trapézio.

Os ângulos de vértices A, B, C e D são os *ângulos* do trapézio.

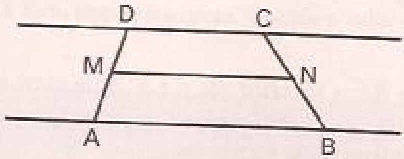
Os segmentos AC e BD, cujos extremos são vértices opostos, são chamados *diagonais* do trapézio.

Os pontos do trapézio que não pertencem aos lados são chamados *pontos interiores*.

2. Considere um trapézio ABCD e o segmento MN cujos extremos são os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC, figura a seguir.



Considere, agora, a faixa de lados AB e DC que contém o trapézio ABCD e, portanto, contém $\overline{MN}$.



Diga se os pontos M e N pertencem ao eixo dessa faixa.

Resposta

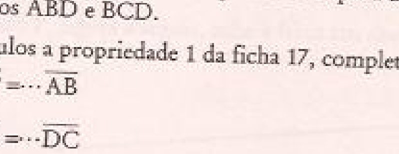
Por que?

Resposta

Você deve ter concluído que os pontos M e N pertencem ao eixo da faixa porque M e N são pontos médios dos segmentos AD e BC, cujos extremos pertencem aos lados da faixa. Assim, $\overline{MN}$ *é paralelo as bases do trapézio* ABCD.

3. Volte a considerar a figura acima, trace a diagonal DB e chame P a interseção dessa diagonal com o eixo MN.

Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte



Observe que o ponto P é o ponto médio da diagonal DB e que a diagonal DB divide o trapézio ABCD em dois triângulos ABD e BCD.

Aplicando a esses triângulos a propriedade 1 da ficha 17, complete:

$$\overline{MP} = \cdots \overline{AB}$$

e $$\overline{PN} = \cdots \overline{DC}$$

Somando membro a membro as igualdades que você deve ter encontrado, tem-se

$$\overline{MP} + \overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DC}$$

$$\text{ou} \quad \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$$

o que mostra que $\overline{MN}$ *é a semi-soma das bases do trapézio* ABCD.

Do que se viu nos itens 2 e 3, tem-se a seguinte

Propriedade

O segmento que liga os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semi-soma.

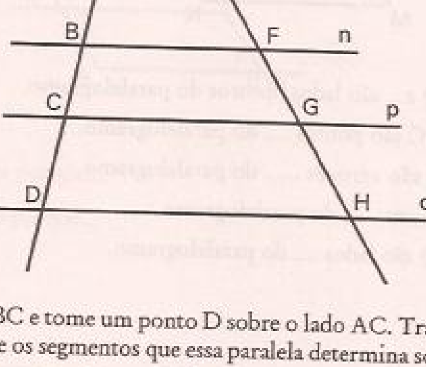
Resolva os exercícios da página 95.

EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 18

1. Considere três retas paralelas cortadas por duas transversais. Os segmentos determinados pelas paralelas em uma das transversais medem 5cm e 4cm e os segmentos determinados na outra transversal medem x e 8cm, respectivamente. Calcule o valor de x.

2. Na figura a seguir as retas m, n, p e q são paralelas e $\overline{AB} = 4cm$, $\overline{BC} = 5cm$, $\overline{CD} = 7cm$ e $\overline{EH} = 20cm$. Calcule as medidas de $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GH}$.

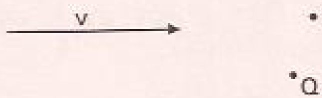


3. Considere um triângulo ABC e tome um ponto D sobre o lado AC. Trace, pelo ponto D, uma paralela ao lado BC. Calcule os segmentos que essa paralela determina sobre os lados AB e AC, sabendo-se que $\overline{AB} = 12cm$, $\overline{AC} = 18cm$ e $\overline{AD} = 8cm$.

Exercícios para a ficha 19

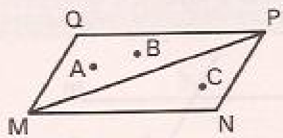
1. Dada a reta r e o ponto P, figura a seguir, ache a faixa em que um dos lados é r e o outro lado passa por P.

2. Dados os pontos P e Q e um vetor v, figura a seguir, ache a faixa cujos lados passam pelos pontos P e Q e têm a direção do vetor v.



3. Dado um segmento AB, diga quantas faixas existem cujos lados passam pelos pontos A e B.

4. Considere o paralelogramo MNPQ, figura a seguir:



Complete:

a) Os segmentos MQ e... são lados opostos do paralelogramo.

b) Os pontos A, B e C são pontos .... do paralelogramo.

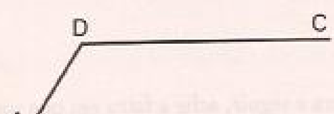
c) Os vértices N e Q são vértices ...... do paralelogramo.

d) O segmento MP é uma .... do paralelogramo.

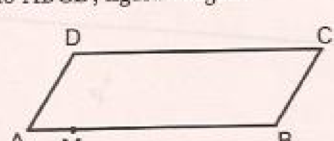
e) Os lados NP e PQ são lados .... do paralelogramo.

Exercícios para a ficha 20

1. Na figura a seguir AD e DC são lados de um paralelogramo; construa o paralelogramo.



2. Considere o paralelogramo ABCD, figura a seguir:



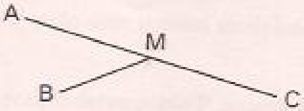
a) Indique pela letra O o centro de simetria desse paralelogramo.

b) Dê o simétrico de $\hat{A}$ em relação a O.

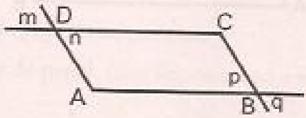
c) Dê o simétrico de $\hat{D}$ em relação a O.

d) Ache o simétrico do ponto M em relação a O.

3. Na figura seguinte, AC é uma diagonal de um paralelogramo e BM é a metade da outra diagonal, construa o paralelogramo.



4. Considere o paralelogramo ABCD e os ângulos m, n, p e q, figura a seguir:



Complete:

a) $\hat{m}$ e $\hat{n}$ são congruentes porque...

b) $\hat{n}$ e $\hat{p}$ são congruentes porque...

c) $\hat{p}$ e $\hat{q}$ são... porque....

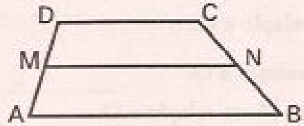
d) $\hat{m}$ e $\hat{q}$ são...

5. Considere quatro pontos não alinhados A, B, C e D tais que os segmentos AB e DC sejam paralelos e congruentes. Diga, justificando, se os pontos A, B, C e D são vértices de um paralelogramo.

6. Considere dois segmentos AB e CD que se interceptam ao meio. Diga, justificando, se os pontos A, B, C e D são vértices de um paralelogramo.

Exercícios para a ficha 21

1. No trapézio ABCD, figura a seguir, M e N são os pontos médios dos lados AD e BC,respectivamente. $\overline{DC}$ =3cm e $\overline{AB}$ =5cm. Calcule a medida de $\overline{MN}$

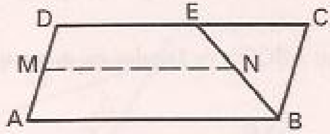


2. Na figura a seguir, ABCD é um paralelogramo; M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BE, respectivamente. Sendo $\overline{DE} = 3cm$ e $\overline{MN} = 5cm$, calcule a medida de cada um dos segmentos seguintes:

a) $\overline{AB}$

b) $\overline{DC}$

c) $\overline{EC}$



Ficha 22

SIMETRIA AXIAL; CONGRUÊNCIA POR SIMETRIA AXIAL

1. Você vai encontrar, depois desta ficha, duas folhas de papel transparente.

Destaque a folha 1 onde estão traçados uma reta r, um ponto P e uma figura F.

Observe que o ponto P e a figura F estão num mesmo semiplano em relação a r.

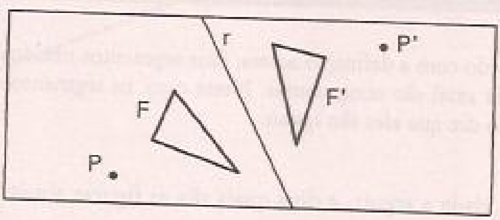
Dobre essa folha segundo a reta r.

Observe que o ponto P vai ocupar a posição de um ponto P' no semiplano oposto. Marque o ponto P'.

Você pode verificar que, dobrando a folha de papel segundo a reta r, qualquer ponto do semiplano de origem r, ao qual o ponto P pertence, é levado num ponto do semiplano oposto. Nestas condições, a figura F do semiplano ao qual P pertence é levada numa figura F' no semiplano oposto.

Desenhe a figura F' na folha de papel transparente.

Você deve ter obtido, na folha de papel, uma figura como a seguinte:



2. Considere, novamente, a folha de papel transparente. Dobre esta folha segundo a reta r de modo que o semiplano ao qual P' pertence seja levado no semiplano ao qual P pertence. Nestas condições, complete:

O ponto P' é levado em...

A figura F' é levada em ...

Você deve ter verificado que o ponto P' é levado em P e a figura F' é levada em F.

3. Do que se viu nos itens 1. e 2., conclui-se que: Dobrando-se a folha de papel segundo a reta r, qualquer ponto P do plano é levado num ponto P' do mesmo plano. Essa correspondência é uma *transformação geométrica* chamada *simetria axial* ou *simetria em relação à reta* r.

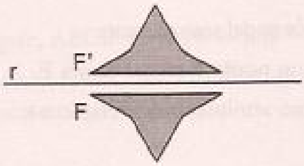
Os pontos P e P' chamam-se *simétricos*.

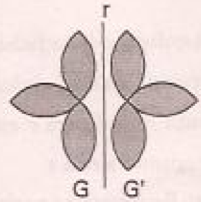
As figuras F e F' chamam-se *figuras simétricas*.

A reta r chama-se *eixo de simetria*.

Observação: A simetria axial leva cada ponto do eixo em si mesmo, isto é, todos os pontos do eixo são *pontos fixos* dessa simetria.

4. Outros exemplos de figuras simétricas uma da outra em relação a um eixo:





Definição

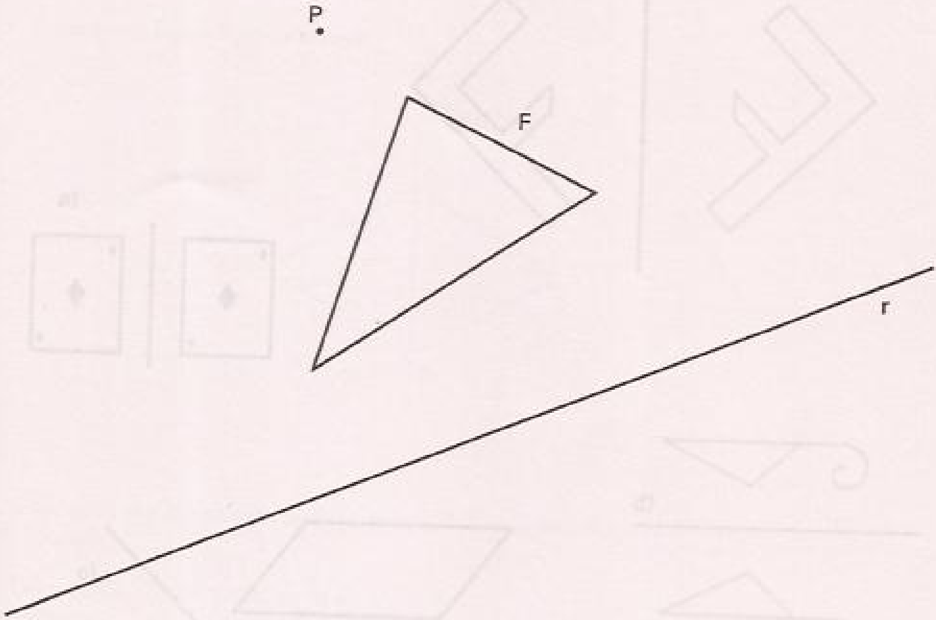
> Dadas duas figuras, F e F', se uma é obtida da outra por uma simetria axial, diz-se que F e F' são *congruentes*.
>
> Escreve-se $F \cong F'$ e se lê F "é congruente a" F'

Observação: De acordo com a definição acima, dois segmentos obtidos um do outro por uma simetria axial são congruentes. Neste caso, os segmentos têm a *mesma medida*; por isso diz que eles são *iguais*.

5. Destaque a folha 2, dada a seguir, e diga quais são as figuras simétricas uma da outra em relação a um eixo.

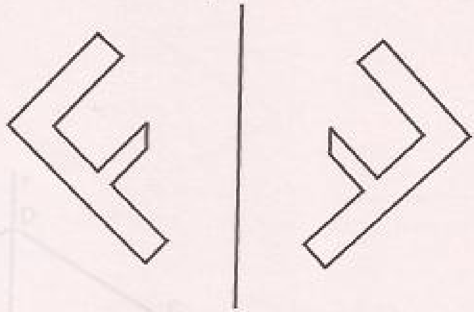
Resposta

Folha 1

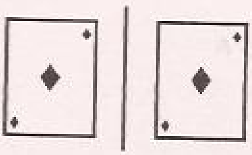


Folha 2

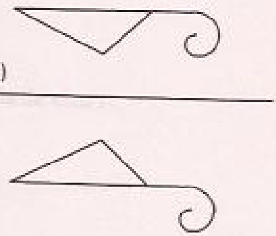
b)



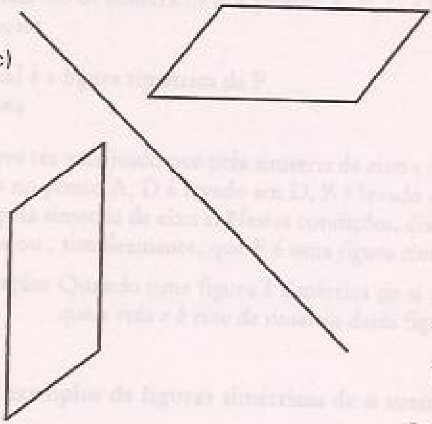
a)



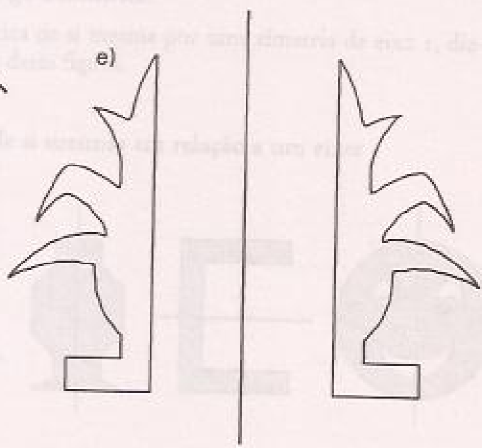
d)



c)

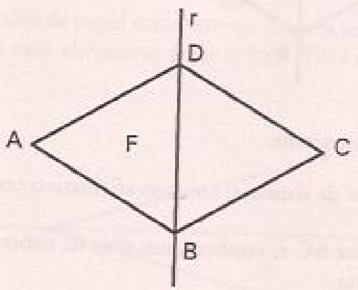


e)



Ficha 23 FIGURAS SIMÉTRICAS; BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

1. Considere a figura F, dada a seguir.



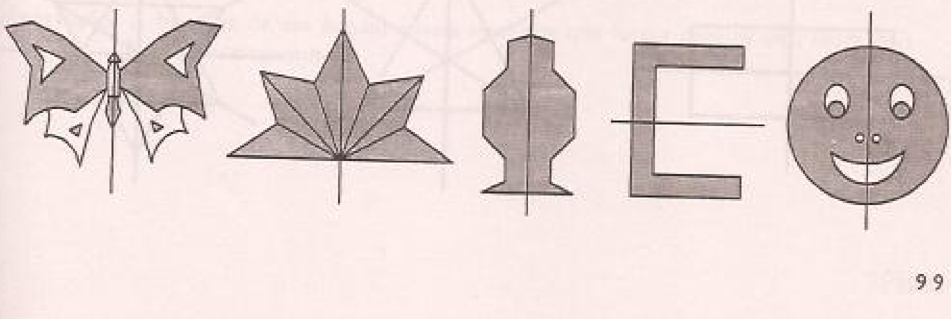
Diga quais são os simétricos dos pontos A, B, C e D pela simetria de eixo r.
Resposta

Diga qual é a figura simétrica de F.
Resposta

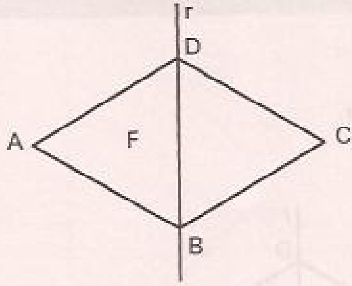
Você deve ter verificado que pela simetria de eixo r o ponto A é levado no ponto C, o ponto C é levado no ponto A, D é levado em D, B é levado em B e, portanto, a figura F é levada em si mesma pela simetria de eixo r. Nestas condições, diz-se que a figura F é uma *figura simétrica de si mesma* ou , simplesmente, que F é uma *figura simétrica.*

Observação: Quando uma figura é simétrica de si mesma por uma simetria de eixo r, diz-se que a reta r é *eixo de simetria* dessa figura.

2. Outros exemplos de figuras simétricas de si mesmas em relação a um eixo:



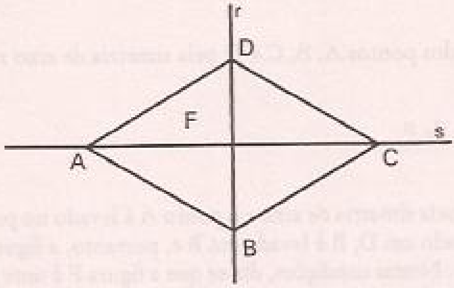
3. Volte a considerar a figura F do item 1., que é simétrica em relação ao eixo r.



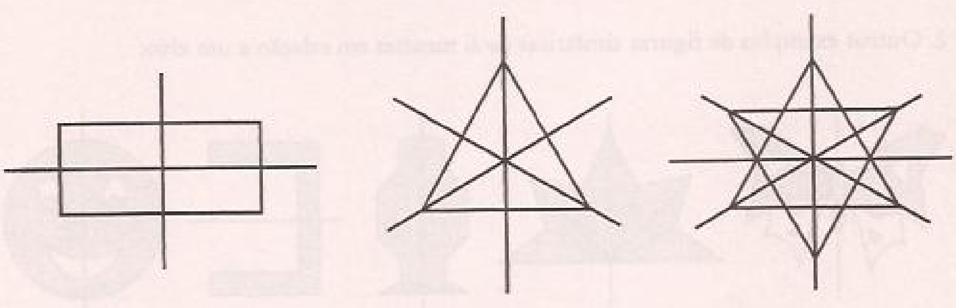
Copie a figura F numa folha transparente.

Diga se essa figura tem outro eixo de simetria; em caso afirmativo trace esse eixo.

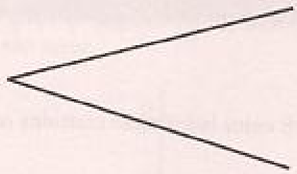
Você deve ter verificado que a reta AC é, também, um eixo de simetria de F. Portanto, a figura F tem dois eixos de simetria.



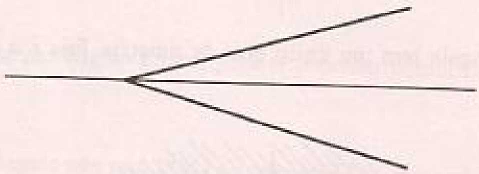
4. Outros exemplos de figuras simétricas que têm mais de um eixo de simetria:



5. Considere, agora, o ângulo dado a seguir.



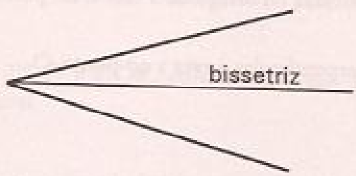
Copie este ângulo numa folha de papel transparente. Diga se este ângulo é uma figura simétrica em relação a um eixo; em caso afirmativo trace o eixo. Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



Diga se este ângulo tem outro eixo de simetria.
Resposta

Você deve ter observado que este ângulo não tem outro eixo de simetria.

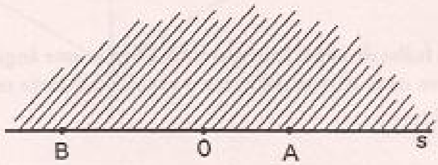
Você pode verificar, também, que *qualquer ângulo tem um único eixo de simetria*. A semi-reta desse eixo que é interior ao ângulo chama-se *bissetriz*.



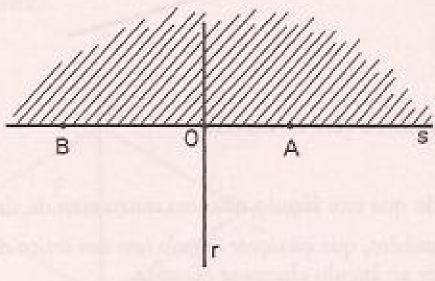
Observação: A bissetriz de um ângulo é uma semi-reta que forma com os seus lados dois ângulos congruentes.

Ficha 24 RETAS PERPENDICULARES

1. Considere um ângulo raso AOB cujos lados estão contidos numa reta s, figura a seguir.



Como você viu, todo ângulo tem um único eixo de simetria. Seja r o eixo de simetria do ângulo raso AOB.



A reta r é chamado *perpendicular* ou *ortogonal* à reta s, no ponto O. O ponto O é chamado *pé da perpendicular* r.

Diga se a reta r é a única perpendicular à reta s no ponto O.
Resposta

Por que?
Resposta

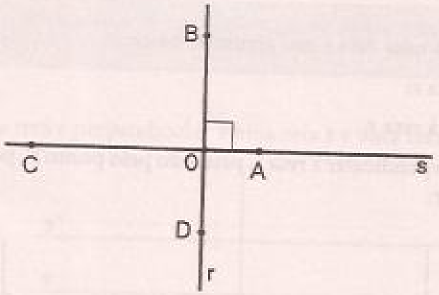
Você deve ter respondido que r é a única reta perpendicular a s, no ponto O, porque a reta r é o único eixo de simetria do ângulo raso AOB.

Observações: 1ª) Se uma reta r é perpendicular a uma reta s, então a reta s é perpendicular à reta r.

2ª) Quando duas retas r e s são perpendiculares pode- se escrever $r \perp s$, o que se lê r "é perpendicular a" s.

2. Como você pode verificar, duas retas perpendiculares determinam quatro ângulos congruentes. Cada um desses ângulos é chamado *ângulo reto*.

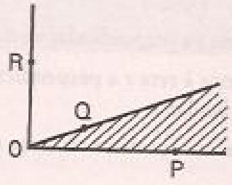
Por exemplo, na figura a seguir, os ângulos AOB, BOC, COD e DOA, determinados pelas retas perpendiculares r e s, são retos.



Para indicar que um ângulo é reto, pode-se proceder conforme se fez para o ângulo AOB, figura acima.

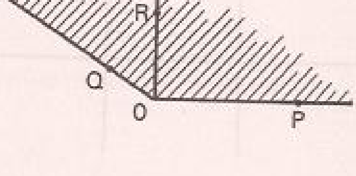
3. Considere um ângulo não reto POQ e a semi-reta OR perpendicular ao lado OP em O. Dois casos podem ocorrer:

1º) A semi-reta OR é exterior ao ângulo POQ. Nestas condições, diz-se que o ângulo POQ é um *ângulo agudo*.



Observação: Os ângulos POQ e QOR, cuja união é um ângulo reto, dizem-se *ângulos complementares*.

2º) A semi-reta OR é interior ao ângulo POQ. Nestas condições, diz-se que o ângulo POQ é um *ângulo obtuso*.



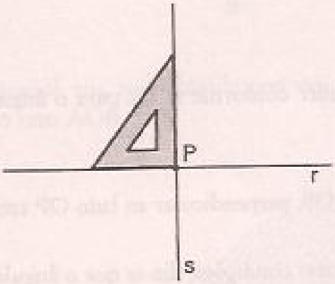
Ficha 25 RETAS PERPENDICULARES: PROPRIEDADES

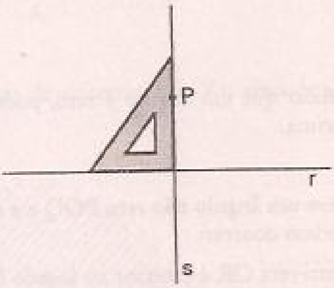
1. Considere um ponto P e uma reta r nos seguintes casos:

o ponto P pertence à reta r;

o ponto P não pertence à reta r.

Para traçar uma reta s perpendicular à reta r, passando pelo ponto P, pode-se usar um esquadro, conforme figura a seguir:





Observe que:

Quando o ponto P pertence à reta r a perpendicular s é o eixo de simetria do ângulo raso de vértice P.

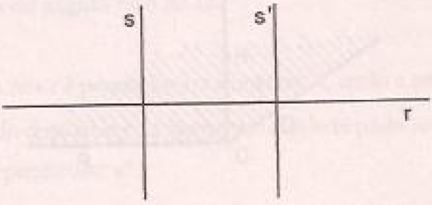
Quando o ponto P não pertence à reta r a perpendicular s é o eixo de simetria do ângulo raso cujo vértice é o pé da perpendicular s.

Nas condições consideradas acima, pode-se mostrar que vale a seguinte

Propriedade 1

> Dada uma reta r e um ponto P do plano existe uma única reta que passa por P e é perpendicular a r.

2. Considere uma reta r e duas retas s e s' perpendiculares a r.

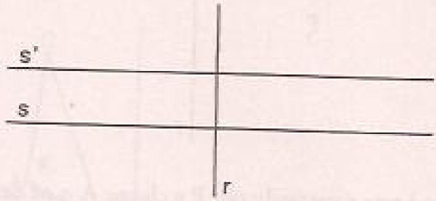


Nestas condições, pode-se mostrar que vale a seguinte

Propriedade 2

Se duas retas distintas s e s' são perpendiculares a uma reta r, então s e s' são paralelas entre si.

3. Considere, agora, uma reta r perpendicular a uma reta s e uma reta s' paralela a s.



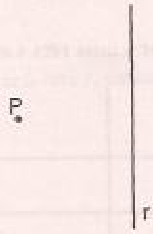
Nestas condições, pode-se mostrar que vale, também, a seguinte

Propriedade 3

Se uma reta r é perpendicular a uma reta s, então r é perpendicular a qualquer reta s' paralela a s.

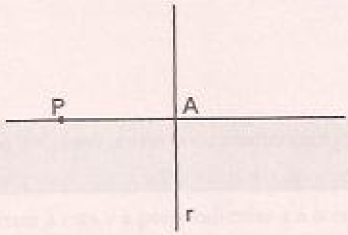
Ficha 26 **FIGURAS SIMÉTRICAS: CONSTRUÇÃO**

1. Considere um ponto P e uma reta r; seja achar o simétrico de P em relação ao eixo r.



Trace a perpendicular à reta r passando por P e chame A o pé dessa perpendicular.

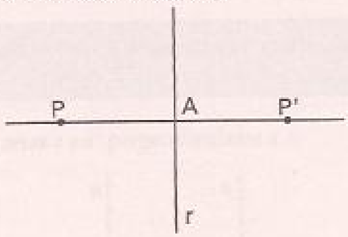
Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



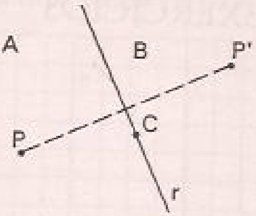
Na figura acima, tome sobre a perpendicular PA o ponto P' tal que

$$\overline{AP'} = \overline{PA}$$

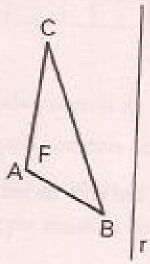
O ponto P' é o simétrico de P em relação ao eixo r.



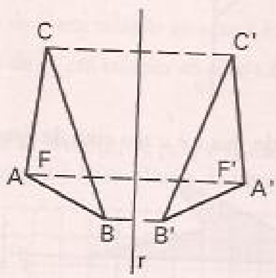
2. Na figura a seguir o ponto P' é o simétrico de P em relação ao eixo r. Ache os simétricos dos pontos A, B e C pela simetria de eixo r.



3. Considere a figura F e a reta r, dadas a seguir. Ache os simétricos dos pontos A, B e C pela simetria de eixo r e ligue os pontos obtidos.



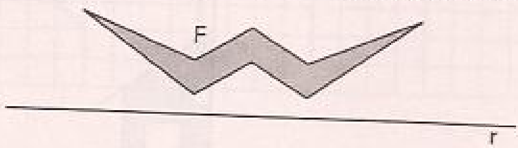
Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



A figura F' é a simétrica de F em relação ao eixo r.

Observação: A figura *simétrica* de uma figura dada é a figura formada pelos simétricos dos seus pontos. Em certos casos, para achar a figura simétrica de uma figura dada basta achar os simétricos de alguns dos seus pontos.

Exercício: Ache a figura simétrica da figura F, dada a seguir, em relação ao eixo r.

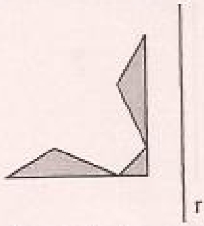


Resolva os exercícios da página 108.

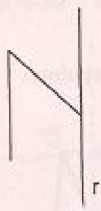
EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 26

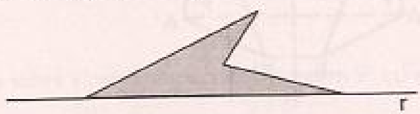
1. Ache a figura simétrica da figura dada a seguir, sendo r o eixo de simetria.



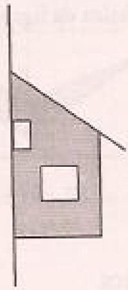
2. Complete a figura seguinte, sabendo que r é o seu eixo de simetria.



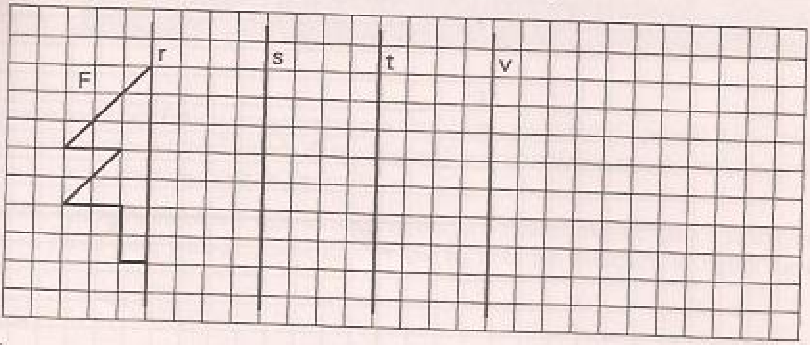
3. Complete a figura seguinte, sabendo que r é o seu eixo de simetria.



4. Complete a figura seguinte, sabendo que r e o seu eixo de simetria.



5. Considere a figura F e as retas paralelas r, s, t e v, dadas a seguir.



I) Ache:

a) a simétrica de F pela simetria de eixo r e indique por F_1

b) a simétrica de F_1 pela simetria de eixo s e indique por F_2

c) a simétrica de F_2 pela simetria de eixo t e indique por F_3

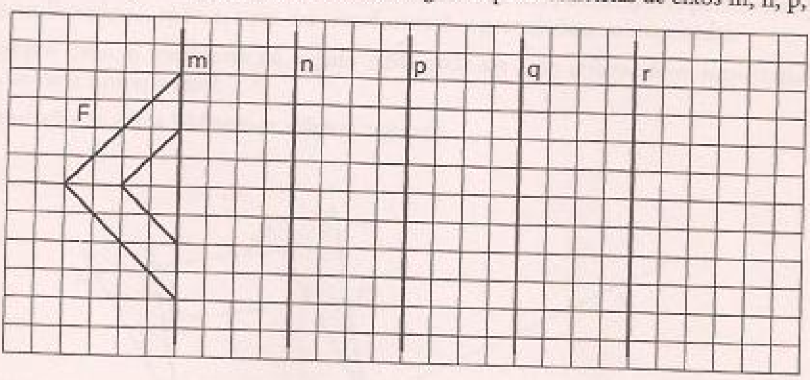
d) a simétrica de F_3 pela simetria de eixo v e indique por F_4

II) Complete:

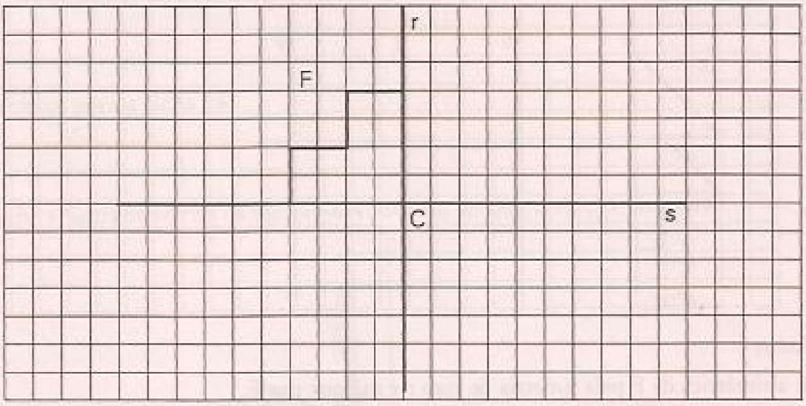
a) a figura simétrica de F em relação ao eixo s é...

b) a figura simétrica de F_4 em relação ao eixo t é....

6. Considere a figura F e as retas m, n, p, q e r, dadas a seguir. Procedendo como foi feito no exercício anterior, construa o friso obtido da figura F pelas simetrias de eixos m, n, p, q e r.



7. Considere a figura F e as retas perpendiculares r e s que se interceptam no ponto C.



I) Ache:

a) a simétrica da figura F pela simetria de eixo r

b) a simétrica da figura F pela simetria de eixo s

c) a simétrica da figura F pela simetria de centro C

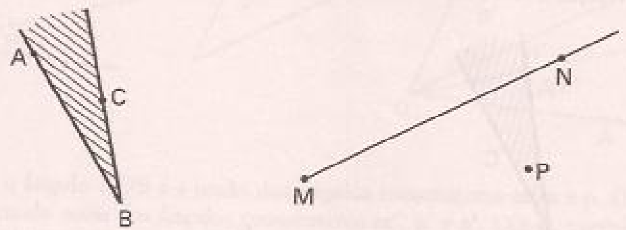
II) Observe a figura formada por F e pelas suas transformadas obtidas nos itens a), b) e c) e diga se ela é uma figura simétrica de si mesma. Justifique sua resposta.

Ficha 27 TRANSPORTE DE FIGURAS

1. Você já sabe construir figuras congruentes por translação, por simetria central e por simetria axial. Quando se acha a transformada de uma figura F por uma dessas transformações, pode-se dizer que foi feito um *transporte* da figura F.
2. Você pode, também, construir figuras congruentes utilizando mais de uma transformação geométrica. Neste caso, pode-se, também, dizer que foi feito um *transporte* da figura dada.

Exemplos:

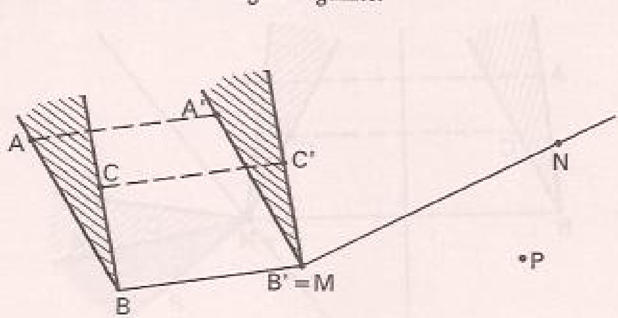
a) Considere o ângulo ABC, a semi-reta MN e o ponto P, figura a seguir. Seja transportar o ângulo ABC de modo que o lado BC coincida com a semi-reta MN, e o lado BA seja levado no semiplano cuja origem é a reta MN e ao qual o ponto P pertence.



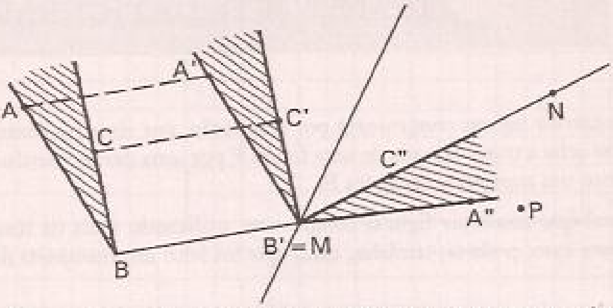
Observe que o lado BC não é paralelo à semi-reta MN. Por isso, o transporte pedido não pode ser feito utilizando-se, apenas, uma das transformações geométricas acima citadas.

No exemplo dado, o transporte do ângulo ABC pode ser feito utilizando-se uma translação seguida de uma simetria axial.

Pela translação de vetor BM tem-se a figura seguinte:

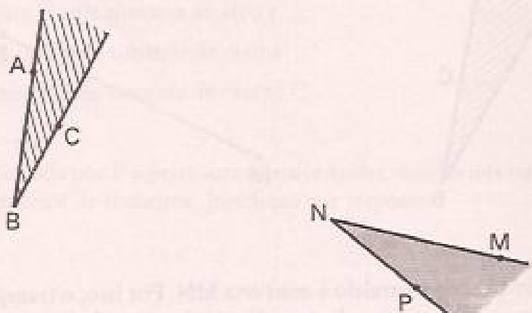


Pela simetria cujo eixo é a reta que contém a bissetriz do ângulo C'MN, tem-se a figura seguinte:

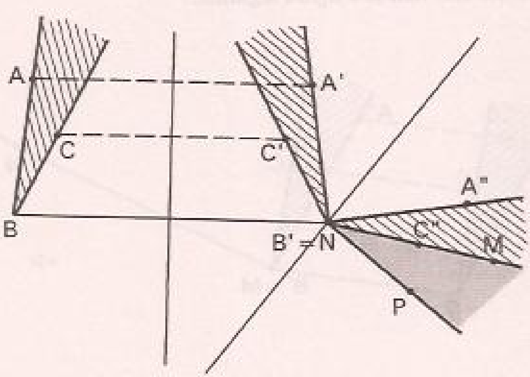


Como se vê, na figura acima, os ângulos ABC e A"MC" são congruentes pois o ângulo A"MC" foi obtido do ângulo ABC utilizando-se duas transformações geométricas. Neste caso diz-se que o ângulo ABC foi *transportado* no ângulo A"MC" de acordo com as condições dadas.

b) Considere, agora, os ângulos ABC e MNP, figura a seguir. Seja transportar o ângulo ABC de modo que o lado BC coincida com o lado NM e os lados BA e NP fiquem em semiplanos opostos em relação à reta NM.



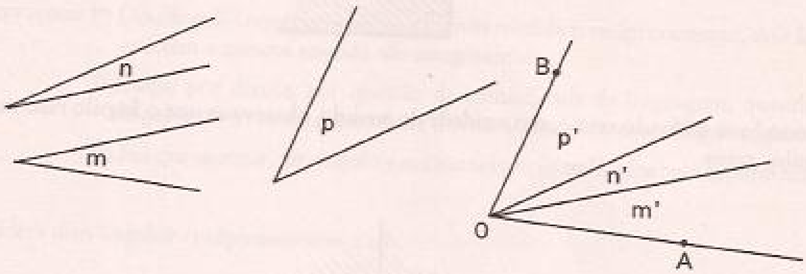
Neste exemplo, o transporte do ângulo ABC pode ser feito utilizando-se duas simetrias axiais conforme figura a seguir.



Como se vê, na figura acima, os ângulos ABC e A "NC" são congruentes pois o ângulo A"NC" foi obtido do ângulo ABC utilizando-se a simetria cujo eixo é a perpendicular ao segmento BN no seu ponto médio, seguida da simetria cujo eixo é a reta que contém a bissetriz do ângulo C'NM. Neste caso, diz-se que o ângulo ABC foi transportado no ângulo A"NC" de acordo com as condições pedidas.

Observação: Nos exemplos dados, o transporte das figuras consideradas foi feito utilizando-se duas transformações geométricas. O transporte pedido poderia, também, ser feito por outras transformações geométricas.

3. O transporte de ângulos permite obter ângulos consecutivos. Por exemplo, os ângulos consecutivos m', n' e p', figura a seguir, foram obtidos dos ângulos m, n e p, respectivamente, a partir da semi-reta OA.



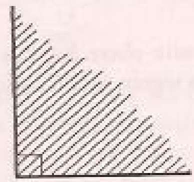
Observe que o ângulo AOB é a união dos ângulos consecutivos m, n e p. O ângulo AOB é, também, chamado *soma* dos ângulos consecutivos m', n' e p'. Diz-se, também que AÔB é a *soma* dos ângulos m, n e p.

Resolva os exercícios da página 117.

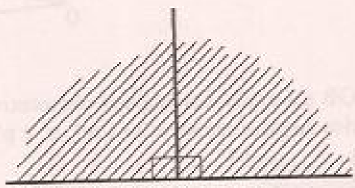
Ficha 28

MEDIDA DE ÂNGULO

1. Seja achar a *medida de um ângulo*. Para isto pode-se tomar como *unidade de medida o ângulo reto.*



Tomando-se o ângulo reto como unidade de medida, observa-se que o ângulo raso mede dois ângulos retos.



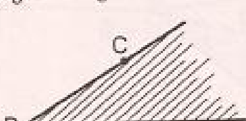
2. A *unidade de medida de ângulo* mais comumente usada é o *grau* que é 1/90 do ângulo reto. Portanto, o ângulo reto mede 90 graus.

O grau é indicado por"° "

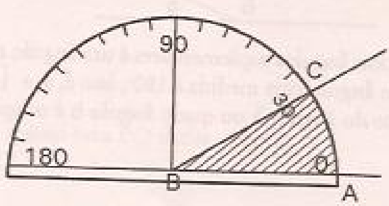
O grau subdivide-se em sessenta partes iguais cada uma chamada *minuto*. O minuto é indicado por " ' ". O minuto subdivide-se em sessenta partes iguais cada uma chamada *segundo*. O segundo é indicado por " " "

Assim, para indicar um ângulo cuja medida é 30 graus 21 minutos e 37 segundos escreve-se 30°21'37".

3. Considere o ângulo agudo ABC, figura a seguir.



Na prática, para medir o ângulo ABC, em graus, pode-se usar um transferidor, conforme figura a seguir.



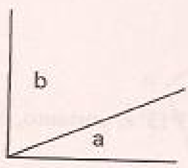
Como se vê, a medida do ângulo ABC é 30°.

Observações: 1ª) Dois ângulos congruentes têm a mesma medida e, reciprocamente, dois ângulos que têm a mesma medida são congruentes.

2ª) Daqui por diante, por questão de comodidade de linguagem, quando dois ângulos tiverem medidas iguais diremos, simplesmente, ângulos iguais.

3ª) No que se segue, um ângulo e sua medida serão indicados pelo mesmo símbolo.

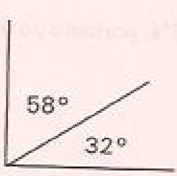
4. Considere dois ângulos complementares a e b.



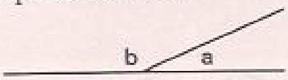
Como você já sabe, a união de dois ângulos complementares é um ângulo reto. Assim, a soma dos ângulos complementares a e b é um ângulo cuja medida é 90°, isto é, $\hat{a} + \hat{b} = 90°$. Neste caso, diz-se que o ângulo a é o *complemento* do ângulo b ou que o ângulo b é o *complemento* do ângulo a.

Exemplo:

O ângulo de 32° é o complemento do ângulo de 58°.



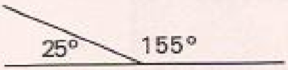
5. Considere dois ângulos suplementares a e b.



Observe que a união de dois ângulos suplementares é um ângulo raso. Assim, a soma dos ângulos suplementares a e b é um ângulo cuja medida é 180°, isto é, $\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$. Neste caso, diz-se que o ângulo a é o *suplemento* do ângulo b ou que o ângulo b é o *suplemento* do ângulo a.

Exemplo:

O ângulo de 25° é o suplemento do ângulo de 155°.



Exercícios resolvidos

1°) Seja achar o complemento do ângulo de 13°15'.

Como a medida de um ângulo com a do seu complemento deve somar 90°, para achar o complemento do ângulo dado basta subtrair 13°15' de 90°.

Para facilitar o cálculo pode-se escrever 90° sob a forma 89°60'. Assim, tem-se

$$\begin{array}{r} 89^\circ 60' \\ 13^\circ 15' \\ \hline 76^\circ 45' \end{array}$$

O complemento do ângulo de 13°15' é, portanto, o ângulo de 76°45'.

2°) Seja achar o suplemento do ângulo de 132°18".

Como a medida de um ângulo com a do seu suplemento deve somar 180°, para achar o suplemento do ângulo dado basta subtrair 132°18" de 180°.

Escrevendo 180° sob a forma 179°59'60", tem-se

$$\begin{array}{r} 179^\circ\ 59'\ 60'' \\ 132^\circ\ 0'\ 18'' \\ \hline 47^\circ\ 59'\ 42'' \end{array}$$

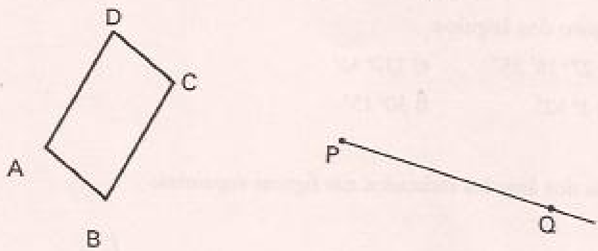
O suplemento do ângulo de 132°18"é, portanto , o ângulo de 47°59'42".

Resolva os exercícios da página 118.

EXERCÍCIOS

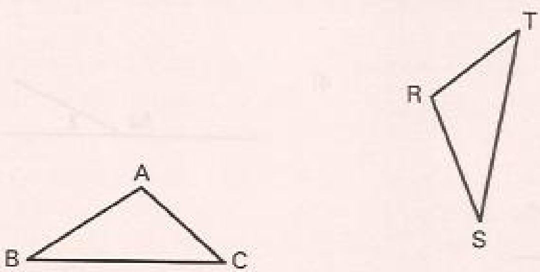
Exercícios para a ficha 27

1. Considere a figura ABCD e a semi-reta PQ dadas a seguir.

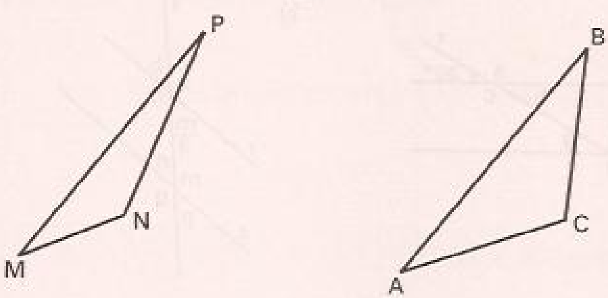


Transporte a figura ABCD de modo que o lado BC seja levado na semi-reta PQ e o ponto B coincida com o ponto P.

2. Nos triângulos ABC e RST, figura a seguir, os ângulos B e S são congruentes. Transporte o triângulo RST de modo que o angulo S coincida com o ângulo B.



3. Nos triângulos ABC e MNP, figura a seguir, os lados AB e MP são congruentes e paralelos. Transporte o triângulo MNP de modo que o lado MP coincida com o lado AB e os vértices C e N fiquem em semiplanos opostos em relação à reta AB.



Exercícios para a ficha 28

1. Calcule o complemento dos ângulos:

a) 35° c) 23°45' 42" e) 42° 23' 14"

b) 42° 15' d) 62° 18" f) 28° 7"

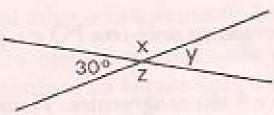
2. Calcule o suplemento dos ângulos:

a) 132° c) 27° 18' 25" e) 110° 45'

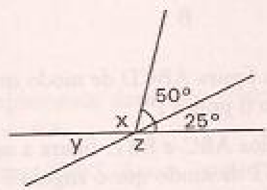
b) 42°3 8' 15" d) 1° 32" f) 30° 15"

3. Calcule as medidas dos ângulos indicados nas figuras seguintes:

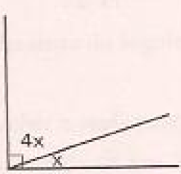
a)



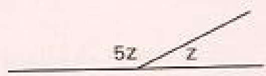
b)



c)



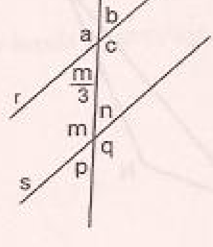
d)



4. Nas figuras a seguir, r//s e t é uma transversal. Calcule as medidas dos ângulos indicados.

a)

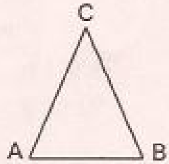
b)



5. Dois ângulos adjacentes medem, respectivamente, 42º 30' e 82º 16'. Calcule o suplemento do ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos.
6. Mostre que o ângulo das bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares é reto.

Ficha 29 TRIÂNGULO ISÓSCELES: PROPRIEDADES

1. Considere um triângulo ABC com o lado AC igual ao lado BC, figura a seguir.



O triângulo ABC é chamado *triângulo isósceles.*

O lado AB é chamado *base* do triângulo isósceles.

Os ângulos A e B dizem-se *ângulos da base* e o ângulo C diz-se *ângulo oposto à base.*

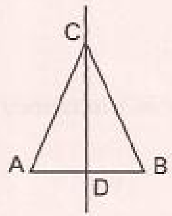
Definição:

> Um triângulo que tem dois lados iguais chama-se *triângulo isósceles.*

Observações: 1ª) Um triângulo que tem os três lados iguais chama-se *triângulo equilátero.*

2ª) Um triângulo que tem os três lados desiguais chama-se *triângulo escaleno.*

2. Considere um triângulo isósceles ABC, com $\overline{AC} = \overline{BC}$, e a reta CD que contém a bissetriz do ângulo C, oposto à base.



Qual é o transformado do lado AC pela simetria de eixo CD?
Resposta

Por que?
Resposta

Qual é o transformado do lado BC pela simetria de eixo CD?
Resposta

Por quê?
Resposta

Qual é o transformado do lado AB pela simetria considerada?
Resposta

Por quê?
Resposta

Você deve ter verificado que, pela simetria de eixo CD, o lado AC se transforma no lado BC, o lado BC se transforma no lado AC e o lado AB se transforma nele mesmo porque, por essa transformação, o ponto C é fixo, o ponto A é levado em B e o ponto B é levado em A.

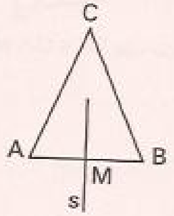
Nestas condições, os ângulos A e B são simétricos em relação ao eixo CD e, portanto, são congruentes.

Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 1

Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são iguais.

3. Considere um triângulo ABC com $\hat{A} = \hat{B}$ e a reta s, perpendicular ao lado AB no seu ponto médio, M.



Observe que a perpendicular s é eixo de simetria do lado AB e os ângulos A e B são iguais. Assim, as semi-retas AC e BC são simétricas uma da outra em relação ao eixo s, logo, o ponto C é simétrico dele mesmo e, portanto, está sobre o eixo.

Nestas condições, os lados AC e BC são simétricos, logo

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 2

Se um triângulo tem dois ângulos iguais, então esse triângulo é isósceles.

Exercício:

Diga, justificando, se são verdadeiras as afirmações seguintes:

a) Todo triângulo equilátero é isósceles.

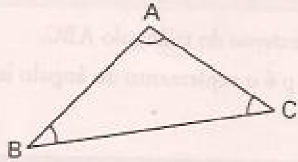
b) Os ângulos de um triângulo equilátero são congruentes.

Resolva os exercícios da página 129.

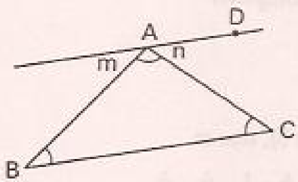
Ficha 30

TRIÂNGULOS: PROPRIEDADES

1. Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo ABC, figura a seguir.



Considere a reta AD paralela ao lado BC do triângulo ABC e sejam m e n os ângulos formados pela reta AD com os lados AB e AC, figura a seguir



Observe que as retas paralelas AD e BC são cortadas pelas transversais AB e AC e complete:

$\hat{m} = \hat{B}$ porque...

$\hat{n} = \hat{C}$ porque...

Observe, ainda, que

$$\hat{m} + \hat{A} + \hat{n} = 1 \text{ raso} = 180^{o}$$

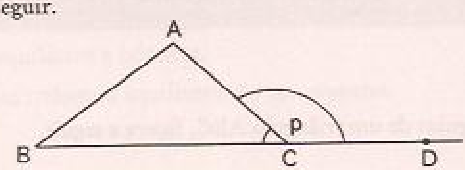
$$\text{ou} \quad \hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = 180^{o}$$

Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 1

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

2. Considere um triângulo ABC e o ângulo p formado pelo lado AC com o prolongamento, CD, do lado BC, figura a seguir.



O ângulo p é chamado *ângulo externo* do triângulo ABC.

Observe que o ângulo externo p é o suplemento do ângulo interno C.

Definição:

> Todo ângulo que é o suplemento de um ângulo interno adjacente de um triângulo é chamado *ângulo externo* do triângulo.

3. Observe a figura do item 2. e complete:

a) $\hat{p} + \hat{C} = 180^\circ$ porque...

b) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \ldots$ porque...

Comparando as igualdades a) e b), tem-se

$$\hat{p} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$$

e, portanto,

$$\hat{p} = \hat{A} + \hat{B},$$

o que mostra que o ângulo externo p, do triângulo ABC, é igual á soma dos ângulos internos não adjacentes, A e B.

Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 2

> Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.

Da igualdade

$$\hat{p} = \hat{A} + \hat{B},$$

resulta

$$\hat{p} > \hat{A} \text{ e } \hat{p} > \hat{B}.$$

Portanto, tem-se a seguinte

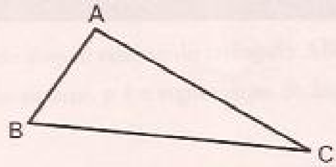
Propriedade 3

> Todo ângulo externo de um triângulo é maior do que cada ângulo interno não adjacente.

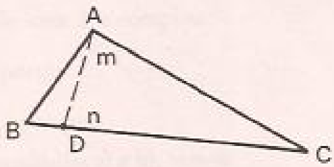
Resolva os exercícios da página 130.

Ficha 31 TRIÂNGULOS: PROPRIEDADES

1. Considere um triângulo ABC, com $\overline{BC} > \overline{AC}$, figura a seguir.



Tomando sobre o lado BC, um ponto D tal que $\overline{DC} = \overline{AC}$ e ligando o ponto A ao ponto D, tem-se a figura seguinte onde m e n são ângulos do triângulo ADC.



Como o triângulo ADC é isósceles, tem-se

$$\hat{m} = \hat{n}$$

Observe que a semi-reta AD é interior ao ângulo A, logo

$$\hat{A} > \hat{m}$$

e, portanto,

$$\hat{A} > \hat{n}$$

Observe, também, que o ângulo n é externo ao triângulo ABD. Nestas condições, tem-se

$$\hat{n} > \hat{B},$$

pela propriedade 3 da ficha 30.

Sendo

$$\hat{A} > \hat{n}$$

$$\text{e} \quad \hat{n} > \hat{B},$$

resulta

$$\hat{A} > \hat{B},$$

o que mostra que, no triângulo ABC, o ângulo A, oposto ao maior lado, BC, é maior que o ângulo B, oposto ao lado AC.

Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 1

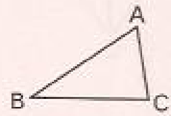
> Se um triângulo tem dois lados desiguais, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Pode-se verificar, também, que vale a seguinte

Propriedade 2

> Se um triângulo tem dois ângulos desiguais, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

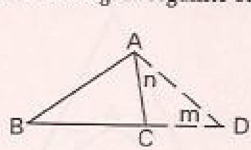
2. Considere um triângulo ABC, figura a seguir.



Tomando sobre o prolongamento do lado BC, um ponto D tal que

$$\overline{CD} = \overline{AC}$$

e ligando os pontos A e D, tem-se a figura seguinte onde m e n são ângulos do triângulo ACD.



Como o triângulo ACD é isósceles, tem-se

$$\hat{m} = \hat{n}$$

Observe que a semi-reta AC é interna ao ângulo BAD logo

$$\hat{n} < B\hat{A}D$$

e, portanto,

$$\hat{m} < B\hat{A}D.$$

Assim, no triângulo ABD tem-se

$$\overline{AB} < \overline{BD}$$

pela propriedade 2 do item 1.

Observe que sendo

$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$

e $\overline{CD} = \overline{AC}$,

resulta, finalmente,

$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC}$,

o que mostra que no triângulo ABC o lado AB é menor do que a soma dos outros dois lados, BC e AC.

Portanto, tem-se a seguinte

Propriedade 3

Cada lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois lados.

Resolva os exercícios da página 130.

EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 29

1. Num triângulo PQR o lado PQ é igual ao lado PR e o ângulo Q mede 54°. Dê a medida do ângulo R.

2. Na figura ao lado, tem-se

$\overline{AB} = \overline{AC}$

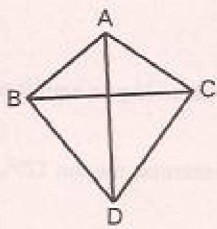
$\overline{BD} = \overline{DC}$

Mostre que

$A\hat{B}C = A\hat{C}B$

$C\hat{B}D = B\hat{C}D$

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$



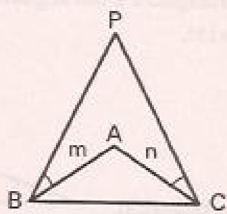
3. Na figura ao lado, tem-se

$\overline{PB} = \overline{PC}$ e

$\overline{AB} = \overline{AC}$

Mostre que

$\hat{m} = \hat{n}$

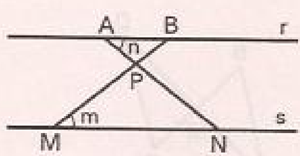


4. Na figura ao lado, tem-se

$s // r$

$\hat{m} = \hat{n}$

Mostre que os triângulos APB e MPN são isósceles



5. Seja ABC um triângulo isósceles. Tire por um ponto P da base BC, paralelas aos lados AB e AC. Sejam M e N, respectivamente, os pontos em que essas paralelas cortam AB e AC. Mostre que os triângulos BMP e CNP são isósceles.

Exercícios para a ficha 30

1. Sendo a, b e c os ângulos internos de um triângulo, complete:

   a) Se $\hat{a} = 57°$ e $\hat{b} = 15°$, então $\hat{c} = ...$

   b)Se $\hat{a} = 90°$, então $\hat{b} + \hat{c} = ...$

   c) Se $\hat{b} = 90°$, então $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são ângulos...

2. Qual o valor de cada um dos ângulos de um triângulo equilátero?

3. Pode existir um triângulo cujos ângulos internos, meçam 125°, 28° e 118°? Justifique sua resposta.

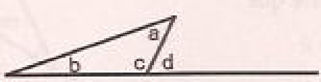
4. Pode existir um triângulo cujos ângulos internos meçam 42°59'12", 19°48" e 118°? Justifique sua resposta.

5. Sejam a, b e c os ângulos internos de um triângulo e x um ângulo externo adjacente ao ângulo b. Dê o valor de $\hat{x}$ sabendo que $\hat{a} = 42°$ e $\hat{c} = 15°$.

6. Na figura ao lado, tem-se

   $\hat{a} = 2\hat{b}$ e $\hat{d} = 60°$

   Ache as medidas dos ângulos internos do triângulo.



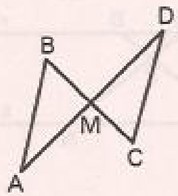
7. Um dos ângulos externos de um triângulo mede 158° e um dos ângulos internos não adjacentes mede 22°. Calcule o valor dos outros ângulos internos do triângulo.

Exercícios para a ficha 31

1. Na figura ao lado tem-se

   $\hat{B} > \hat{A}$ e

   $\hat{C} > \hat{D}$



Mostre que

$\overline{AD} > \overline{BC}$

2. Sejam AB e CD dois segmentos que se cortam num ponto P.

Mostre que

$$\overline{AC} + \overline{BD} < \overline{AB} + \overline{CD}.$$

Ficha 32 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

1. Dados dois triângulos, se um pode ser obtido do outro por um transporte, diz-se que eles são *congruentes*. Nesse transporte cada lado de um triângulo é levado num lado igual do outro e cada ângulo é levado, também, num ângulo igual do outro.

Definição

> Dois triângulos são *congruentes* quando existe entre eles uma correspondência tal que os lados correspondentes são iguais e os ângulos correspondentes são, também, iguais.

De acordo com essa definição, dizer que dois triângulos são congruentes significa dizer que os seis elementos de um são iguais aos seis elementos correspondentes do outro.

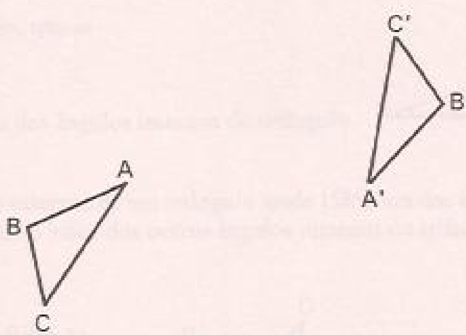
Existem casos em que, para afirmar que dois triângulos são congruentes, basta verificar a igualdade entre três elementos de um e os elementos correspondentes do outro. No item 2, será estudado um desses casos.

2. Considere os triângulos ABC e A'B'C', figura a seguir, com

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\overline{AC} = \overline{A'C'}$

$\hat{A} = \hat{A}'$

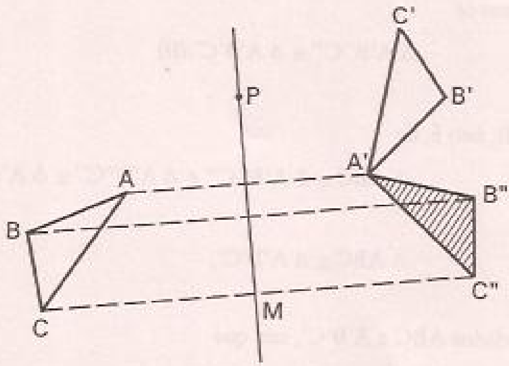


Para concluir que os triângulos dados são congruentes, basta mostrar que o triângulo ABC pode ser levado no triângulo A'B'C' por um transporte, de modo que o lado AB coincida com o lado A'B', o lado AC coincida, com o lado A'C' e o ângulo A coincida com o ângulo A'.

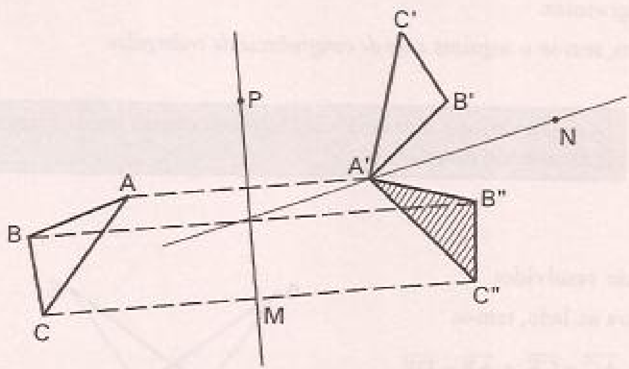
Neste caso, o transporte pode ser feito utilizando-se duas simetrias axiais.

Considerando a simetria de eixo PM, sendo PM perpendicular a $\overline{AA'}$ no seu ponto médio, tem-se a figura seguinte onde

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B''C'' \quad (I)$$



Considerando, agora, a simetria cujo eixo é a reta A'N que contém a bissetriz do ângulo B'A'B", tem-se a figura seguinte:



Observe, na figura acima, que a bissetriz A'N do ângulo B'A'B" é, também, a bissetriz do ângulo C"A'C' pois

$$C''\hat{A}'B'' = \hat{A} = \hat{A}' \text{ e } B''\hat{A}'N = N\hat{A}'B'$$

Pela simetria de eixo A'N, tem-se que:

a semi-reta A'C" é levada na semi-reta A'C';

a semi-reta A'B" é levada na semi-reta A'B';

portanto, o ângulo B"A'C" é levado no ângulo B'A'C'.

Além disso, tem-se que:

o ponto C" é levado no ponto C', pois $\overline{A'C''} = \overline{AC} = \overline{A'C'}$;

o ponto B" é levado no ponto B', pois $\overline{A'B''} = \overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Nestas condições, tem-se

$$\Delta A'B''C'' \equiv \Delta A'B'C' \text{ (II)}$$

Das relações (I) e (II), isto é, de

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B''C'' \text{ e } \Delta A'B''C'' \equiv \Delta A'B'C',$$

resulta

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C',$$

logo, os triângulos dados ABC e A'B'C', tais que

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$\overline{AC} = \overline{AC'}$$

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

são congruentes.

Portanto, tem-se o seguinte *caso de congruência de triângulos*:

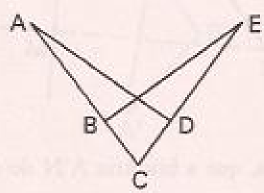
> Se dois triângulos têm dois lados respectivamente iguais compreendendo um ângulo igual eles são *congruentes*.

Exercício resolvido:

Na figura ao lado, tem-se

$$\overline{AC} = \overline{CE} \text{ e } \overline{AB} = \overline{DE}$$

Mostre que $\Delta ACD \equiv \Delta BCE$



Nas condições dadas, para mostrar que os triângulos ACD e BCE são congruentes, pode-se verificar se eles tem dois lados respectivamente iguais compreendendo um ângulo igual.

Observe que:

$\overline{BC} = \overline{CD}$, pois $\overline{AC} = \overline{CE}$ e $\overline{AB} = \overline{DE}$;

o ângulo C é comum aos dois triângulos.

Assim, nos triângulos ACD e BCE tem-se

$$\overline{AC} = \overline{CE}\,,\ \overline{CD} = \overline{BC} \text{ e } \hat{C} = \hat{C}$$

Portanto, $\Delta\, ACD \cong \Delta\, BCE$.

Ficha 33 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

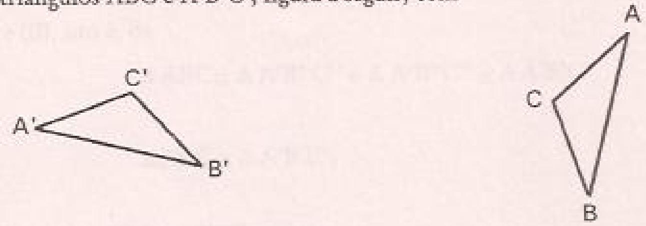
1. No item 2. da ficha anterior foi estudado um caso de congruência de triângulos. Nesta ficha, será considerado um outro caso de congruência de triângulos.

2. Considere os triângulos ABC e A'B'C', figura a seguir, com

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$

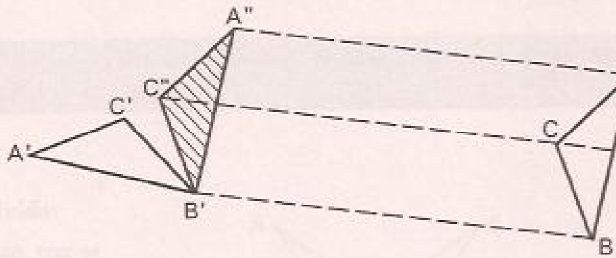


Para concluir que os triângulos dados são congruentes, basta mostrar que o triângulo ABC pode ser levado no triângulo A'B'C' por um transporte, de modo que o lado AB coincida com o lado A'B', o ângulo A coincida com o ângulo A' e o ângulo B coincida com o ângulo B'.

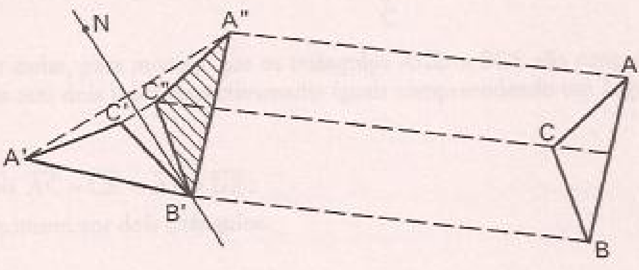
Neste caso, o transporte pode ser feito utilizando-se uma translação seguida de uma simetria axial.

Considerando a translação de vetor BB', tem-se a figura seguinte onde

$$\Delta ABC \cong \Delta A''B'C'' \qquad (I)$$



Considerando, agora, a simetria cujo eixo é a reta B'N que contém a bissetriz do ângulo C'B'C", tem-se a figura seguinte:



Observe, na figura acima, que a bissetriz B'N do ângulo C'B'C" é, também, a bissetriz do ângulo A'B'A", pois

$$C''\hat{B}'A'' = \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } C'\hat{B}'N = N\hat{B}'C''$$

Pela simetria de eixo B'N tem-se que:

a semi-reta B'A" é levada na semi-reta B'A';

a semi-reta B'C" é levada na semi-reta B'C';

portanto, o ângulo A"B'C" é levado no ângulo A'B'C'.

Observe, ainda, que o ponto A" é levado no ponto A', pois $\overline{A''B'} = \overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Além disso, a semi-reta A"C" é levada na semi-reta A'C' pois

$$\hat{A}'' = \hat{A} = \hat{A}'$$

Como o ponto C" é levado num ponto da semi-reta B'C' e, também, num ponto da semi-reta A'C', então, C" é levado no ponto C' que é a interseção das semi-retas A'C' e B'C'.

Nestas condições, tem-se

$$\Delta A''B'C'' \cong \Delta A'B'C' \quad \text{(II)}$$

Das relações (I) e (II), isto é, de

$$\Delta ABC \cong \Delta A''B'C'' \text{ e } \Delta A''B'C'' \cong \Delta A'B'C'$$

resulta

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

logo, os triângulos dados ABC e A'B'C', tais que

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\hat{B} = \hat{B}',$$

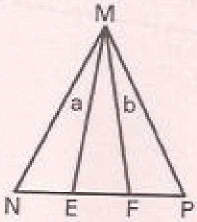
são congruentes.

Portanto, tem-se o seguinte *caso de congruência de triângulos:*

> Se dois triângulos têm um lado igual e os ângulos adjacentes a este lado respectivamente iguais, eles são congruentes.

Exercício resolvido:

Na figura ao lado o triângulo MNP é isósceles e $\hat{a} = \hat{b}$. Mostre que o triângulo MEF é isósceles.



Nas condições dadas, para mostrar que o triângulo MEF é isósceles, basta mostrar que $\overline{ME} = \overline{MF}$.

Observe que $\overline{ME}$ é um dos lados do triângulo MNE e $\overline{MF}$ é um dos lados do triângulo MPF. Assim, para mostrar que $\overline{ME} = \overline{MF}$ basta verificar se os triângulos MNE e MPF são congruentes.

Observe que

$$\overline{MN} = \overline{MP} \text{ e } \hat{N} = \hat{P},$$

porque o triângulo MNP é isósceles. Assim, nos triângulos MNE e MPF tem-se

$$\overline{MN} = \overline{MP}$$

$$\hat{N} = \hat{P}$$

$$\hat{a} = \hat{b},$$

logo $\Delta\, MNE \equiv \Delta\, MPF$.

Portanto, $\overline{ME} = \overline{MF}$, o que mostra que o triângulo MEF é isósceles.

Ficha 34 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

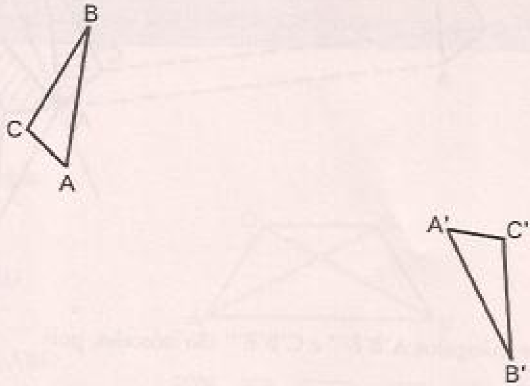
1. Nesta ficha será estudado um terceiro caso de congruência de triângulos.

2. Considere os triângulos ABC e A'B'C', figura a seguir, com

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\overline{AC} = \overline{A'C'}$

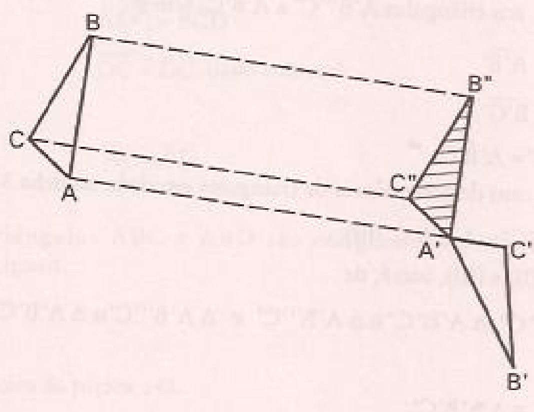
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$



Para concluir que os triângulos dados são congruentes, basta mostrar que o triângulo ABC pode ser levado no triângulo A'B'C' por um transporte, de modo que o lado AB coincida com o lado A'B', o lado AC coincida com o lado A'C' e o lado BC coincida com o lado B'C'.

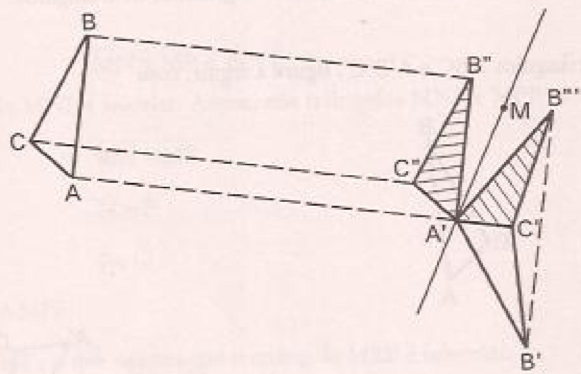
Considerando a translação de vetor AA', tem-se a figura seguinte onde

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B''C'' \quad (I)$$



Considerando, agora, a simetria cujo eixo é a reta A'M, que contém a bissetriz do ângulo C''A'C', tem-se a figura seguinte onde

$$\Delta A'B''C'' \cong \Delta A'B'''C' \qquad (II)$$



Observe que os triângulos A'B'B''' e C'B'B''' são isósceles, pois

$$\overline{A'B'''} = \overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ e } \overline{B'''C'} = \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

Assim,

$$A'\hat{B}'B''' = A'\hat{B}'''B' \text{ e } C'\hat{B}'B''' = C'\hat{B}'''B'$$

e, portanto,

$$A'\hat{B}'C' = A'\hat{B}'''C'$$

Nestas condições, nos triângulos A'B'''C' e A'B'C' tem-se

$$\overline{A'B'''} = \overline{A'B'}$$

$$\overline{B'''C'} = \overline{B'C'}$$

$$A'\hat{B}'''C' = A'\hat{B}'C'$$

e, portanto, pelo caso de congruência de triângulos estudado na ficha 32, tem-se

$$\Delta A'B'''C' \cong \Delta A'B'C' \text{(III)}$$

Das relações (I), (II) e (III), isto é, de

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B''C'', \Delta A'B''C'' \cong \Delta A'B'''C' \text{ e } \Delta A'B'''C' \cong \Delta A'B'C',$$

resulta

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C',$$

logo, os triângulos dados, ABC e A'B'C', tais que

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$\overline{AC} = \overline{A'C'}$$

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}$$

são congruentes.

Portanto, tem-se o seguinte *caso de congruência de triângulos:*

Se dois triângulos têm os três lados respectivamente iguais eles são congruentes.

Exercício resolvido:

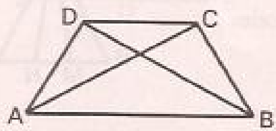
Na figura ao lado tem-se

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

$$A\hat{D}C = B\hat{C}D$$

Mostre que

$$\Delta\, ABC \equiv \Delta\, ABD.$$



Observe que os triângulos ABC e ABD têm dois lados respectivamente iguais,

$$\overline{AD} = \overline{BC} \text{ e } \overline{AB} = \overline{AB} \text{ (lado comum)}$$

Assim, para mostrar que os triângulos considerados são congruentes basta verificar se $\overline{AC} = \overline{BD}$ .Observe que $\overline{AC}$ é um dos lados do triângulo ADC, $\overline{BD}$ é um dos lados do triângulo BCD e que estes triângulos são congruentes pois

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

$$A\hat{D}C = B\hat{C}D$$

$$\overline{DC} = \overline{DC} \text{ (lado comum)}$$

Logo,

$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

Portanto, os triângulos ABC e ABD são congruentes porque têm os três lados respectivamente iguais.

Resolva os exercícios da página 142.

EXERCÍCIOS

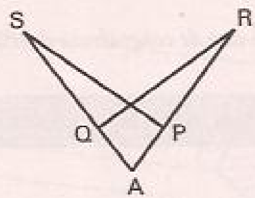
Exercícios para as fichas 32, 33 e 34.

1. Na figura ao lado, tem-se

$$\overline{AP} = \overline{AQ} \text{ e } \overline{AR} = \overline{AS}$$

Mostre que

$$\hat{R} = \hat{S}$$

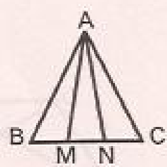


2. Na figura ao lado, tem-se

$$C\hat{A}N = B\hat{A}M$$

e o triângulo ABC é isósceles.

Mostre que $\overline{BM} = \overline{NC}$

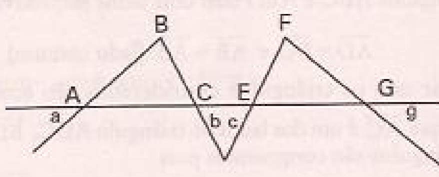


3. Na figura ao lado, tem-se

$$\overline{AC} = \overline{EG}$$

$$\hat{a} = \hat{g} \text{ e } \hat{b} = \hat{c}$$

Mostre que $\hat{B} = \hat{F}$

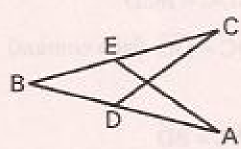


4. Na figura ao lado, tem-se que

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\text{e } B\hat{A}E = B\hat{C}D$$

Mostre que $\overline{EC} = \overline{DA}$

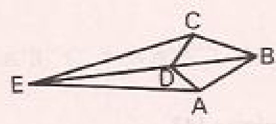


5. Na figura ao lado, tem-se $\overline{EA} = \overline{EC}$

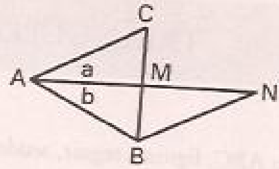
e $\overline{EB}$ é a bissetriz do ângulo E.

Mostre que

$$B\hat{C}D = B\hat{A}D$$



6. Na figura ao lado, tem-se



$\overline{AB} = \overline{AC}$

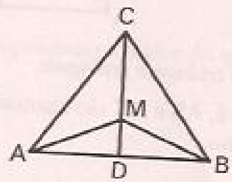
$\overline{AM} = \overline{MN}$

e $\hat{a} = \hat{b}$

Mostre que

$\overline{AC} = \overline{BN}$

7. Na figura ao lado, tem-se



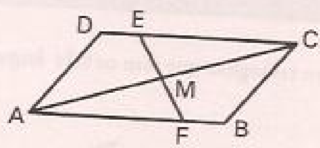
$\overline{AC} = \overline{BC}$

e $\overline{AD} = \overline{DB}$

Mostre que

$\overline{AM} = \overline{BM}$

8. Na figura ao lado, tem-se



$\overline{AD} = \overline{BC}$

$\overline{AB} = \overline{DC}$

e $\overline{AM} = \overline{MC}$

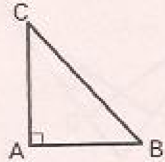
Mostre que

$\overline{EM} = \overline{MF}$

9. Mostre que, um triângulo que tem como vértices os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles é, também, isósceles.

Ficha 35 TRIÂNGULO RETÂNGULO

1. Considere um triângulo ABC, figura a seguir, sendo A um ângulo reto.



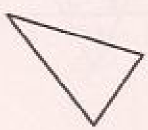
O triângulo ABC é chamado *triângulo retângulo.*

Os lados do ângulo reto, isto é, AB e AC são chamados *catetos*. O lado oposto ao ângulo reto, isto é BC, é chamado *hipotenusa.*

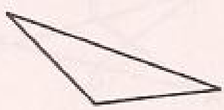
Definição

Um triângulo que tem um ângulo reto chama-se *triângulo retângulo.*

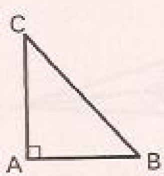
Observações: 1ª) Um triângulo que tem os três ângulos agudos chama-se *triângulo acutângulo.*



2ª) Um triângulo que tem um ângulo obtuso chama-se *triângulo obtusângulo.*



2. Considere um triângulo retângulo ABC, figura a seguir.



Observe que

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o \text{ e } \hat{A}=90^o,$$

portanto,

$$\hat{B}+\hat{C}=90^o$$

Da igualdade $\hat{B}+\hat{C}=90^o$, resulta que no triângulo retângulo ABC os ângulos B e C, opostos aos catetos, são ângulos complementares. Logo, *num triângulo retângulo, os ângulos opostos aos catetos são complementares e, portanto, agudos.*

*Exercício:

Mostre que num triângulo retângulo a hipotenusa é maior do que qualquer cateto.
Resposta.

Resolva os exercícios da página 146.

Observação importante: Os exercícios precedidos de asterísco(*) devem ser resolvidos pois serão utilizados posteriormente.

EXERCÍCIOS

Exercícios para a ficha 35

*1. Mostre que se dois triângulos retângulos têm os catetos respectivamente iguais, então eles são congruentes.

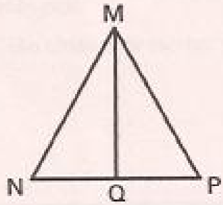
*2. Mostre que se dois triângulos retângulos têm um cateto igual e o ângulo agudo adjacente também igual, então eles são congruentes.

*3. Mostre que se dois triângulos retângulos têm a hipotenusa igual e um ângulo agudo igual, então eles são congruentes.

4. Na figura ao lado,

   $\overline{NQ} = \overline{QP}$ e $\overline{MN} \perp \overline{NP}$

   Mostre que $\hat{N} = \hat{P}$



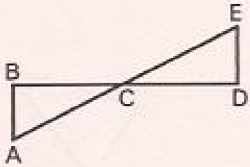
5. Na figura ao lado,

   $\overline{AB} \perp \overline{BD}$

   $\overline{DE} \perp \overline{BD}$

   $\overline{BC} = \overline{CD}$

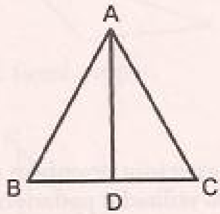
   Mostre que $\overline{AB} = \overline{DE}$



6. No triângulo isósceles ABC,

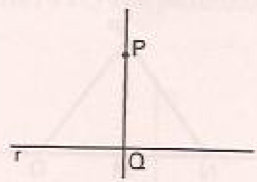
   $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

   Mostre que $\overline{BD} = \overline{DC}$

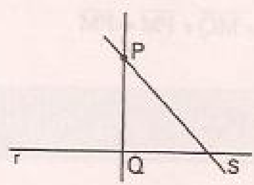


Ficha 36 PERPENDICULARES E OBLÍQUAS

1. Como já se viu, dada uma reta r e um ponto P fora de r, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular a r. Essa perpendicular intercepta a reta r em um ponto Q. O ponto Q é o pé da perpendicular.



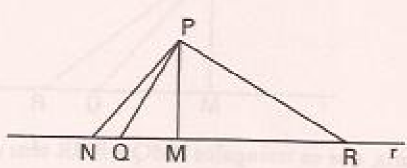
O segmento PQ é, também, chamado *perpendicular*. Qualquer outra reta que passe por P e corte a reta r num ponto S, diferente de Q, é chamada *oblíqua* a r.



O segmento PS é, também, chamado *oblíqua*. O ponto S é chamado pé da oblíqua.

Para indicar que duas retas r e s são oblíquas escreve-se $r \angle s$ e se lê r "oblíqua a " s.

2. Considere uma reta r e um ponto P fora de r. Seja $\overline{PM}$ perpendicular à reta r e sejam $\overline{PN}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ oblíquas a r.



No triângulo retângulo PMR a perpendicular $\overline{PM}$ é um cateto e a oblíqua $\overline{PR}$ é a hipotenusa, logo

$$\overline{PM} < \overline{PR},$$

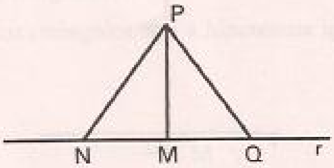
isto é, a perpendicular $\overline{PM}$ é menor do que a oblíqua a $\overline{PR}$.

Tem-se, também,

$$\overline{PM} < \overline{PN} \text{ e } \overline{PM} < \overline{PQ}$$

Você pode verificar que *a perpendicular* $\overline{PM}$ *é menor do que qualquer oblíqua que passe por* P.

3. Considere , agora, $\overline{PM}$ perpendicular á reta r e sejam $\overline{PN}$ e $\overline{PQ}$ obliquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular $\overline{PM}$.



Observe, na figura acima, que os triângulos retângulos PMN e PMQ são congruentes porque os catetos são, respectivamente, iguais, isto é,

$$\overline{NM} = \overline{MQ} \text{ e } \overline{PM} = \overline{PM}$$

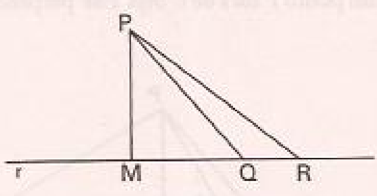
Portanto,

$$\overline{PN} = \overline{PQ},$$

o que mostra que:

Duas oblíquas cujos pés se afastam igualmente do pé da perpendicular são iguais.

4. Considere, ainda, $\overline{PM}$ perpendicular à reta r e sejam $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ oblíquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular $\overline{PM}$.



Observe, na figura acima, que os triângulos PMQ e PMR têm um ângulo reto, M. Assim, os ângulos PQM e PRQ são agudos.

Observe, também, que o ângulo PQR é suplemento do ângulo agudo PQM e, portanto, $P\hat{Q}R$ é um ângulo obtuso.

Nestas condições, no triângulo PQR tem-se

$$P\hat{Q}R > P\hat{R}Q$$

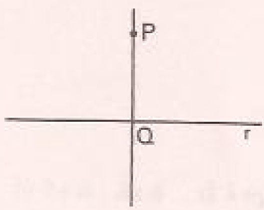
e, portanto,

$$\overline{PR} > \overline{PQ}$$

o que mostra que:

Duas oblíquas cujos pés se afastam desigualmente do pé da perpendicular são desiguais e a maior é aquela cujo pé mais se afasta.

5. Seja P um ponto fora de uma reta r e PQ a perpendicular a r passando pelo ponto P.



Definição

> Chama-se *distância de um ponto P a uma reta r* a distância entre o ponto P e o pé da perpendicular a r tirada por P.

Indica-se a distância de um ponto P a uma reta r por d(P,r). Se Q é o pé da perpendicular pode escrever

$$d(P,r) = d(p,Q).$$

RESPOSTAS

Exercícios para a ficha 1

página 14

1. sim
2. não
5. sim

Exercícios para a ficha 3

página 20

4. sim
5. não

Exercícios para a ficha 5

página 31

2. -v, v, 2v, 3v

Exercícios para a ficha 6

página 35

6. M, N, P e Q
7. sim

Exercícios para a ficha 9

página 48

1. a) verdadeira b) verdadeira c) verdadeira
   d) falsa e) verdadeira
2. a) $\overline{NP}$ b) o ponto N c) $\overline{MP}$ d) {N} e){ }
3. a) sim b) não

Exercícios para a ficha 12

página 61

2. $\hat{a}$ e $\hat{d}$; $\hat{b}$ e $\hat{e}$; $\hat{c}$ e $\hat{f}$

3. a) $\hat{c}$ b) $\hat{a}$ ou $\hat{c}$

4. $\hat{c}$ e $\hat{d}$ bem como $\hat{f}$ e $\hat{g}$ são congruentes porque são opostos pelo vértice

6. a) $\hat{b}$ ou $\hat{d}$ b) $\hat{b}$, $\hat{c}$ ou $\hat{d}$, $\hat{c}$ c) $\hat{c}$, $\hat{d}$

7. a) adjacentes b) adjacentes c) consecutivos

Exercícios para a ficha 13

página 62

1. a) $\hat{a}$ e $\hat{m}$; $\hat{d}$ e $\hat{q}$; $\hat{b}$ e $\hat{n}$; $\hat{c}$ e $\hat{p}$ b) $\hat{c}$ e $\hat{m}$; $\hat{d}$ e $\hat{n}$ c) $\hat{a}$ e $\hat{p}$; $\hat{b}$ e $\hat{q}$
   d) correspondente e) alternos internos f) alternos externos
2. a) sim b) não

Exercícios para as fichas 16 e 17

página 79

1. 8
2. 4;4
3. 4m, 5m, 6m
4. 4m
5. a) 3 b) 3
6. 5/3

Exercícios para a ficha 18

página 93

1. 10cm
2. 5cm; 6,25cm; 8,75cm
3. $\frac{16}{3}$ cm

Exercícios para a ficha 19

página 93

3. uma infinidade
4. a) NP
   b) interiores
   c) opostos
   d) diagonal
   e) consecutivos

Exercícios para a ficha 20

página 94

2. b) $\hat{C}$
   c) $\hat{B}$
4. a) são ângulos opostos pelo vértice
   b) são ângulos opostos do paralelogramo
   c) congruentes; são ângulos opostos pelo vértice
   d) ângulos congruentes.

Exercícios para a ficha 21

página 95

1. 4cm
2. a) 7cm b) 7cm c) 4cm

Exercícios para a ficha 26

página 108

5. II) a) F_3 b) F_1

Exercícios para a ficha 28

página 118

1. a) 55° b) 47°45' c) 66°14'18"

d) 27°59'42" e) 47°36'46" f) 61°59'53"

2. a) 48° b) 137°21'45" c) 152°41'35"

d) 178°59'28" e) 69°15' f) 149°59'45"

3. a) $\hat{x} = 150°$, $\hat{y} = 30°$, $\hat{z} = 150°$

b) $\hat{x} = 105°$, $\hat{y} = 25°$, $\hat{z} = 155°$

c) $\hat{x} = 18°$, $3\hat{x} = 54°$

d) $\hat{z} = 30°$, $5\hat{z} = 150°$

4. a) $\hat{a} = \hat{c} = \hat{d} = \hat{f} = 150°$, $\hat{b} = \hat{e} = \hat{g} = 30°$

b) $\hat{e} = \hat{c} = \hat{m} = \hat{q} = 135°$, $\hat{b} = \frac{\hat{m}}{3} = \hat{n} = \hat{p} = 45°$

5. 117°37'

Exercícios para a ficha 29

página 129

1. 54°

Exercícios para a ficha 30

página 130

1. a) 108° b) 90°
2. 60°
3. não
4. sim
5. 57°
6. $\hat{a} = 40°$, $\hat{b} = 20°$, $\hat{c} = 120°$
7. 22°, 136°

EDUFBA

Editora da Universidade Federal da Bahia
Rua Augusto Viana, 37 - Canela
CEP: 40110-060 - Salvador - BA
Tel.: (071)245-9564/ Fax: (071)235-8991
Internet (E-Mail):edufba@ufba.br
Atendemos pelo reembolso postal

1996