TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE EDO'S LINEARES

FP

$y' = \dfrac{dy}{dx}$

FD

Professor: CarlosRogério Gomes Cabral

EDO's de 1ª Ordem Lineares

Uma equação diferencial **linear** de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)} \qquad (1)$$

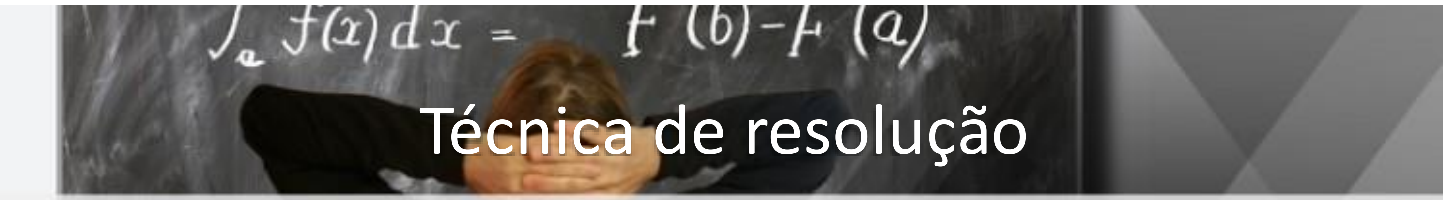
ou $y' + p(x)y = Q(x)$

onde P e Q são funções contínuas de x. A Equação (1) é a **forma-padrão** da equação linear.

Para resolver a equação linear $\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$, multiplique os dois lados pelo fator integrante $\boxed{v(x) = e^{\int P(x)\,dx}}$ e integre os dois lados.

Assim, obtemos a solução geral:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{v(x)} \int v(x)Q(x)\,dx}$$



Técnica de resolução

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = Q(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = y'$$

$v(x) = v$

$p(x) = p$

$Q(x) = Q$

$$\left[y' + p(x)y = Q(x)\right] \cdot v(x)$$

$d(A \cdot B) = A' \cdot B + A \cdot B'$

$$\boxed{vy' + vpy} = \boxed{vQ}$$

Impondo.

$$\frac{d(vy)}{dx} = v'y + v \cdot y' = v \cdot y' + v'y = vy' + vpy$$

$$\underline{v' = vp} \rightarrow v' = \frac{dv}{dx} \rightarrow \frac{dv}{dx} = vp$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int p\,dx$$

$$\ln(v) = \int p\,dx$$

$$\cancel{e}^{\cancel{\ln}(v)} = e^{\int p\,dx}$$

$$v(x) = e^{\int p\,dx} \rightarrow \text{fator integrante.}$$

$$\underbrace{vy' + vpy}_{} = Qv$$

$$\frac{d(vy)}{dx} = Q \cdot v \rightarrow \int d(vy) = \int Qv \cdot dx$$

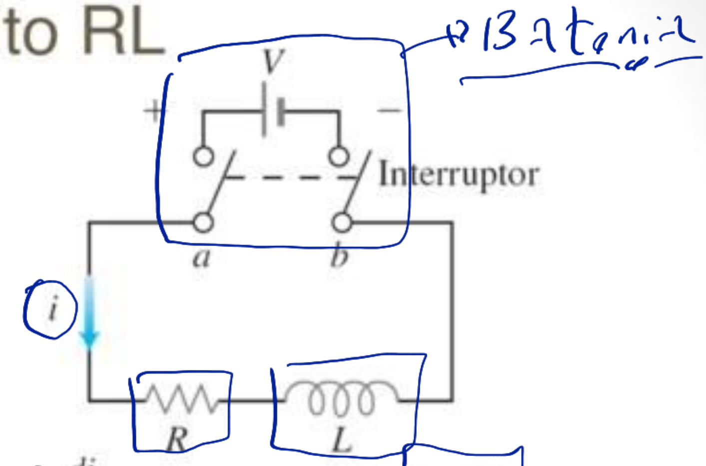
$$vy = \int Q\,v\,dx$$

$$y = \frac{1}{v(x)} \cdot \int Q(x)\,v(x)\,dx$$

Solução geral

Aplicação

Circuito RL



EDO: $L\frac{di}{dt} + Ri = V$, onde $\boxed{i = i(t)}$.

Condição inicial: $i(0) = 0$.

$$\left(\cancel{L}\frac{di}{\cancel{L}dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}\right) \div L \longrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

$$i' + \underbrace{\frac{R}{L}}_{p(x)} i = \underbrace{\frac{V}{L}}_{Q(x)}$$

$$p(x) = \frac{R}{L} \qquad Q(x) = \frac{V}{L}$$

$$v(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \left(\frac{R}{L}\right) dt} = e^{\frac{R}{L}\int dt}$$

$$v(x) = e^{\frac{R}{L}t}$$

$$y(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot \int v(x) \cdot Q(x) \cdot dx$$

$$y(x) = \frac{1}{e^{\frac{R}{L}t}} \cdot \int e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{V}{L}\, dt$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$y(x) = e^{-\frac{R}{L}t} \frac{V}{L} \int e^{\frac{R}{L}t}\, dt$$

$$\boxed{u = \frac{R}{L} t}$$

$$du = \frac{R}{L}\, dt$$

$$\boxed{dt = \frac{L}{R}\, du}$$

$$y(x) = e^{-\frac{R}{L}t} \frac{V}{L} \int e^{u} \frac{L}{R}\, du$$

$\downarrow$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \frac{V}{L} \left(\frac{L}{R} \int e^{u}\, du \right)$$

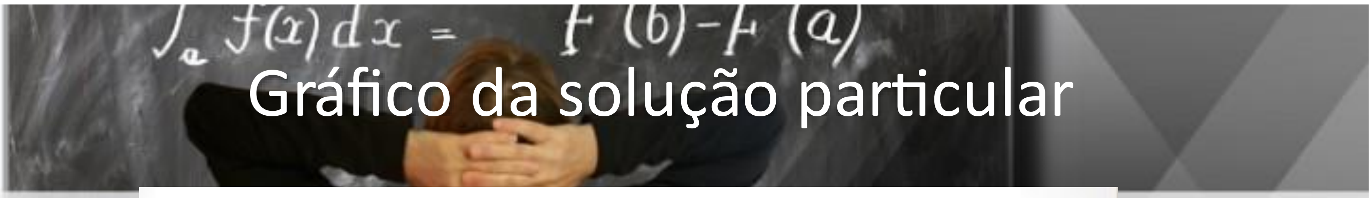


Gráfico da solução particular

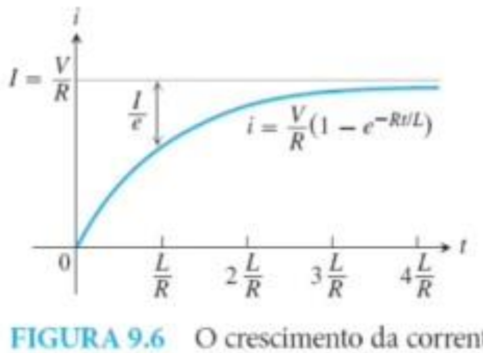


FIGURA 9.6 O crescimento da corrente no circuito *RL* do Exemplo 5. *I* é o valor estacionário da corrente. O número $t = L/R$ é constante de tempo do circuito. A corrente atinge 5% de seu valor estacionário em três constantes de tempo (Exercício 31).

Exemplo

$$\boldsymbol{Determine\ a\ solução\ particular\ da\ EDO:}$$
$$\boldsymbol{y' - xy = x, sujeita\ a\ condição\ inicial\ y(0) = 3}$$

$$\underset{P(x)}{y' - x y} = \underset{Q(x)}{x}$$

$Q(x) = x$

$P(x) = -x$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{x+1} + C$$

$$v(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int (-x)\,dx} = e^{-\int x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$y(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot \int v(x) \cdot Q(x)\,dx$$

$$\boxed{u = -\frac{x^2}{2}}$$

$$du = (-x)\,dx$$

$$\boxed{dx = \frac{du}{-x}}$$

$$y(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}}} \cdot \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\,dx$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{u} \cdot \cancel{x} \frac{du}{(-\cancel{x})}$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-e^{u} + C\right)$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right)$$

$\int_a f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

EDO's Exatas de 1ª Ordem

- Desafio de hoje é determinar um método de solução de EDO's como:

$$y' = -\frac{(1+2xy^3)}{3x^2y^2}$$

- Seja a EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

diferencial exato

↓

cálculo 2

condição para que a EDO seja exata:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Const

$x^2y + \frac{\partial(x^2y)}{\partial x}$

$\boxed{y = 2x}$ ou $2xy$

$\int_a f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

EDO's Exatas de 1ª Ordem

Soluções:

- Se $M = \frac{\partial u}{\partial x}$, temos

$$\boxed{u(x,y) = \int M dx + k(y)}$$

onde $k(y)$ é determinado pela condição $N = \frac{\partial u}{\partial y}$.

- Se $N = \frac{\partial u}{\partial y}$, temos

$$\boxed{u(x,y) = \int N dy + l(x)}$$

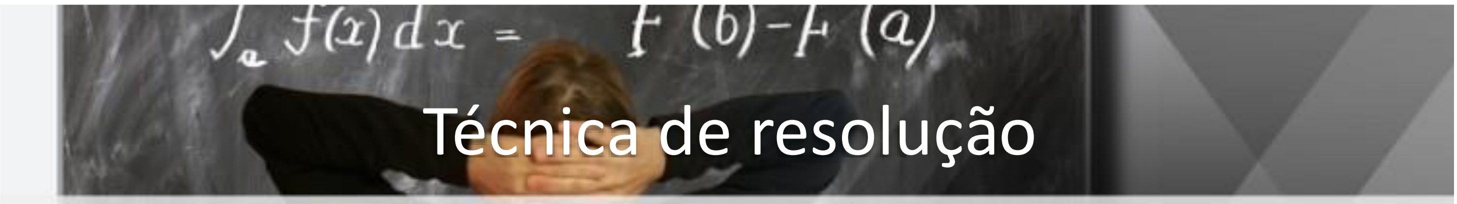
onde $l(x)$ é determinado pela condição $M = \frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\boxed{d(u(x,y))} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{M}dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{N}dy = 0$$

↓

$$\int d\,u(x,y) = \int 0 \rightarrow \boxed{u(x,y) = c}$$

Solução Geral



Técnica de resolução

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

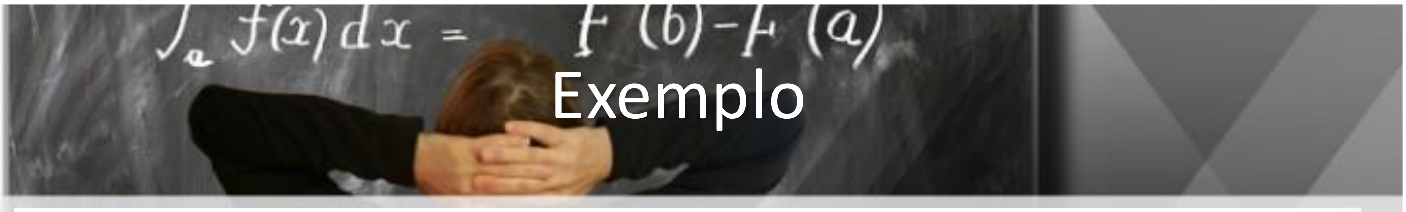
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow \text{condição p/ ser exata.}$$

$$u(x,y) = C \rightarrow \text{solução Geral}$$

$$\int M(x,y)\,dx = \int \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,dx$$

$$\int M(x,y)\,dx = u(x,y) - k(y)$$

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$



Exemplo

- Desafio de hoje é determinar um método de solução de EDO's como:

$$y' = -\frac{(1+2xy^3)}{3x^2y^2} \rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+2xy^3)}{3x^2y^2}$$

$$3x^2y^2\,dy = -(1+2xy^3)\,dx$$

$$\underbrace{3x^2y^2}_{N}dy + (1+2xy^3)\,dx = 0$$

$$\underbrace{(1+2xy^3)}_{M}dx + \underbrace{(3x^2y^2)}_{N}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial(1+2xy^3)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial x}$$

$$2x \cdot 3y^2 = 2 \cdot 3x \cdot y^2$$

$$\boxed{6xy^2 = 6xy^2}$$

$$\mu(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

$$\mu(x,y) = \int (1 + 2xy^3)\,dx + k(y)$$

$$\mu(x,y) = \int 1\,dx + \int 2xy^3\,dx + k(y)$$

$$\mu(x,y) = x + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}y^3 + k(y)$$

Solution Genel

$$\boxed{\mu(x,y)} = x + x^2y^3 + k(y)$$

$$y^3 \rightarrow$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = N$$

$$N = \frac{\partial(\cancel{x} + x^2y^3 + k(y))}{\partial y}$$

$$\frac{\partial k(y)}{\partial(y)} = \frac{dk}{dy}$$

$k'(y)$

$$N = 3y^2x^2 + k'(y)$$