



Abaetetuba – Pa 07 a 09 de dezembro de 2022

***Liber Abaci*: algumas potencialidades**

José dos Santos Guimarães Filho¹

João Cláudio Brandemberg²

Resumo

Neste artigo, trazemos a temática de estudar textos históricos com o intuito de apontar suas potencialidades pedagógicas/didáticas para o ensino de objetos matemáticos, tendo em vista, as competências e habilidades da BNCC. Objetivamos investigar as técnicas contidas nos capítulos iniciais do *Liber Abaci*, e o que as técnicas encontradas podem oferecer como potencialidades para o ensino de objetos matemáticos. Desta forma, fizemos uma investigação do *Liber Abaci* nos apoiando em estudos como de Potro (2007) e Sigler (2002) para compreender sua importância e conteúdo. Nesta investigação, foi possível verificar que com um tratamento didático, o *Liber Abaci* apresenta potencialidades para o ensino de representações numéricas, sistema numérico decimal, algoritmos das quatro operações aritméticas entre outras que serão apresentadas no presente artigo. Logo, podemos inferir que o *Liber Abaci* tem potencialidades para atender as competências e habilidades das unidades de conhecimento, números e álgebra, propostos pela BNCC.

Palavras-chave: *Potencialidades pedagógicas/didáticas. BNCC. Textos históricos. Liber Abaci.*

Introdução

O matemático italiano Leonardo Pisano (1180 – 1250), o Fibonacci como é mais conhecido, é considerado um dos matemáticos de maior destaque do cenário europeu. Obteve esse destaque a partir de suas obras publicadas no século XIII, em especial, com seu primeiro livro intitulado de *Liber Abaci*, por trazer inovações para o cenário europeu, como os algarismos indo-arábicos e o sistema posicional decimal dos indianos.

Ao observar a grandiosidade desta obra, nos questionamos se a partir de um estudo das técnicas do *Liber Abaci* é possível extrair potencialidades que possam suprir as competências e habilidades da BNCC? Como um estudo preliminar,

¹ Mestre; Universidade Federal do Pará (UFPA); e-mail: js_guima@hotmail.com

² Doutor; Universidade Federal do Pará (UFPA); e-mail: brand@ufpa.br

Realização



Apoio





Abaetetuba – Pa 07 a 09 de dezembro de 2022

objetivamos investigar as técnicas contidas nos capítulos iniciais do *Liber Abaci* e o que estas podem oferecer como potencialidades para o ensino de objetos matemáticos. Para tanto, fizemos uma investigação do *Liber Abaci* da edição de 1857 apoiados em estudos como de Potro (2007) e Sigler (2002) para compreender sua importância e conteúdo.

Assim, organizamos este artigo em duas seções, a primeira apresenta o livro e uma parte de seu conteúdo e a segunda seção, na qual, apresentamos suas potencialidades pedagógicas/didáticas.

1 – *Liber Abaci*

Nossa escolha pelo *Liber Abaci* se baseia nos estudos ao longo de nossa jornada acadêmica, onde estudamos autores como Potro (2007), que apresenta o *Liber Abaci* como um texto central para a Aritmética comercial do século XIII. Logo, sua importância reside em apresentar uma Aritmética geral, ou seja, com generalizações para diversas situações e por apresentar a Aritmética comercial, pois era uma das principais atividades neste século, bem como, para outras atividades urbanas, como os cambistas e banqueiros.

O *Liber Abaci* foi escrito por Fibonacci em 1202, ao chegar de suas viagens pelo oriente, após o conhecimento de suas habilidades pela corte de Frederico II (1194 – 1250), e teve uma reedição em 1228, pelo próprio autor, a partir de algumas considerações feitas por Michael Scott³ (1175 – 1235), o qual é citado nas primeiras linhas desta reedição. O *Liber Abaci* teve um papel importante na Europa, como o de ser um dos responsáveis pela divulgação das cifras indianas. Mas, para o século XIII foi aquele que proporcionou uma organização e sistematização das técnicas exigidas pelo comércio em suas diversas atividades, bem como, pelos ofícios urbanos.

³ Foi filósofo e um dos estudiosos da corte do rei Frederico II.

Realização



Apoio





Abaetetuba – Pa 07 a 09 de dezembro de 2022

Vale ressaltar, que utilizamos a edição de 1857, referente a edição de 1228, do Códice Magliabechiano (Figura 3), que é o acervo mais antigo da Biblioteca Nacional Central de Florença (BNCF).

O autor deixa claro que tentou reunir todos os conhecimentos tomados em suas viagens para ensinar este novo Método Aritmético e para facilitar a compreensão das teorias apresentadas, como ele mesmo julga, divide o livro em quinze capítulos, os quais são apresentados logo após o prólogo em uma espécie de índice, Leonardo Pisano (1857) não traz nem um tipo de numeração neste momento, no entanto, no decorrer do livro traz uma organização ordinal, assim temos os seguintes capítulos: Sobre o conhecimento das nove figuras indianas, e como cada número é escrito com elas, e quais números, e como devem ser retidos nas mãos, e nas introduções do cálculo; Sobre a multiplicação de números inteiros; Sobre adição um com o outro; Sobre a extração de números menores de números maiores; Sobre a divisão de números inteiros por números inteiros; Sobre a multiplicação de números inteiros com quebras e quebras sem inteiros; Sobre a adição e extração e divisão de números inteiros com quebras e a redução de números quebrados em uma parte; Na compra e venda de mercadorias e afins; Sobre a permuta de bens imóveis e sobre a compra de bens imóveis, e algumas regras semelhantes sobre as parcerias feitas entre associados; Sobre a consolação das moedas e suas regras, que se refere ao conforto; Sobre as soluções de muitas questões colocadas que chamamos de erráticas (errantes); Sobre a regra de *elcataym*, como quase todas as questões errantes são resolvidas por ela; Sobre a descoberta de raízes quadradas e cúbicas por multiplicação e divisão, ou extraindo-as de si mesmas, e sobre o tratamento de binômios e suas raízes e suas raízes; Sobre as regras relativas às proporções geométricas: sobre questões de *alibre* e *almuchabale*.

Os capítulos iniciam com a apresentação das nove cifras indianas (Figura 1), “O primeiro capítulo começa. São as nove figuras dos indianos 9 8 7 6 5 4 3 2 1 e assim, com essas nove figuras, e para elas, este é o sinal de 0, que é chamado em

Realização



Apoio

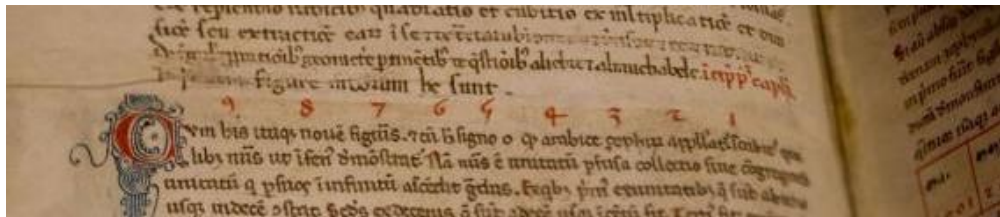




Abaetetuba – Pa 07 a 09 de dezembro de 2022

árabe de *zephirum*, se forma qualquer tipo de número” (LEONARDO PISANO, 1857, p. 2, tradução nossa).

Figura 1 – Recorte da apresentação das cifras indianas.



Fonte: <https://www.festivaldelmedioevo.it/portal/fibonacci-i-numeri-indiani/>

O autor apresenta em seguida o funcionamento do sistema numérico decimal posicional adotado, explica de forma minuciosa a valoração posicional que cada cifra passa a ter a partir de seu posicionamento (Figura 2), nossas conhecidas unidades, dezenas, centenas e etc, **com uma espécie de legenda.**

Figura 2 – Valoração posicional.

M .i	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMDC	MMM	MCXI	MCCXXXIII	MMMMCCCXXI
1001	2 0 2 3	3 0 2 2	3 0 2 0	5 6 0 0	3 0 0 0	1 1 1 1	1 2 3 4	4 3 2 1

Fonte: Leonardo Pisano (1857).

Há um cuidado no livro de ensinar como deve ser lido os números na regra dos indianos, para tanto, o autor ensina a separação, que chama de varas de três, ou seja, de três em três cifras (Figura 3), sempre da direita para a esquerda apresentando desta forma a regra de como deve ser lido cada valor escrito. Inferimos que esta regra era conhecida de alguns na Europa como arcos pitagóricos (triplos), apresentados por Gebert d’Aurillac anteriormente, os quais usamos até hoje (SIGLER, 2002). O autor apresenta variados exemplos de quantidades pequenas e de grandes quantidades,

Realização



Apoio

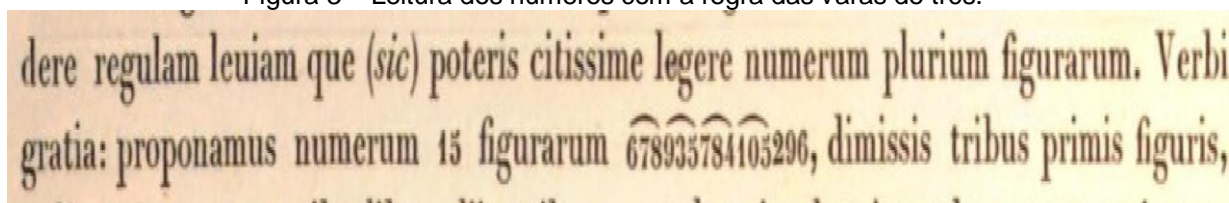




Abaetetuba – Pa 07 a 09 de dezembro de 2022

bem como, com repetição de algarismos e com casas decimais sem valoração, representadas pelo zero.

Figura 3 – Leitura dos números com a regra das varas de três.



Fonte: Leonardo Pisano (1857).

Leonardo Pisano (1857), também introduz algumas simbologias para uma melhor fluidez dos cálculos, uma vez que as equações eram escritas utilizando muitas palavras sem simbologias para coisas simples como para os valores desconhecidos e suas potências. Suprindo essa carência encontramos no *Liber Abaci* algumas simbologias (Figura 4) como, **res** e **radix** para representar os valores desconhecidos, **census** e **cubus** para representar respectivamente o quadrado e o cubo de um número, o **R** para representar a raiz quadrada, sendo um dos primeiros a usar um traço horizontal na representação das frações (GARBI, 2007).

Figura 4 – Recortes de diferentes páginas com algumas simbologias.

nariis 7, sequitur necessario, illum habere quinque res minus denariis 7: quia cum ipse habuerit 7 de denariis secundi, tunc habebit quinque **res** integras; et secundo remanebit res una; et sic primus habebit quincuplum eius: quare si de portione primi hominis addantur 5 secundo, que petit ei; et habebit utique secundus rem, et denarios uel diminutus equabitur alicui numero. Sed ut hec apertius habeantur, ponantur 5 census equari denariis 45: diuides ergo 45 per 5, uenient denarii 9, qui equantur **census**, hoc est **census** est 9, et **radix** eius est 3. Similiter cum **census** $\frac{1}{2} 4$ equatur denariis 26, diuides 26 per $\frac{1}{2} 4$, scilicet 78, per 13, exhibunt 6; quibus equatur unus **census**. Quare radix eius est surda, cum sit radix numeri non quadrati. Et cum $\frac{2}{3}$ unius **census** numeri radicem cubicam non habeant: sed si primus numerus eorum, et ultimus essent cubi, uel habentes proportionem inter se sicut **cubus** numerus ad cubum numerum; tunc interciderent inter eos duo numeri ratiocinati. Verbi gratia: si primus numerus

Fonte: Leonardo Pisano (1857).

Muitos podem julgar, a partir de uma visão presentista, que o conteúdo desse livro é mais algébrico do que aritmético. Porém, devemos lembrar que os indícios

Realização



Apoio





Abaetetuba – Pa 07 a 09 de dezembro de 2022

mostram, a partir de livros como esse, que a álgebra no século XIII e XIV fazia parte da aritmética prática e comercial, servindo sempre para resolver problemas da vida cotidiana urbana e comercial, ou seja, de ordem prática. Não tendo um apreço nas universidades que apreciavam mais a especulação filosófica preservando a aritmética e a música da tradição inaugurada por Boécio (SAITO, 2015).

2 – Alguns apontamentos das potencialidades do *Liber Abaci*

Encontramos no *Liber Abaci*, após essa investigação, potencialidades para o ensino de objetos matemáticos, primeiramente fizemos algumas colocações, com vistas a uma melhor compreensão de nossos apontamentos. Deixamos claro, inicialmente, que a noção de potencialidade pedagógica/didática por nós adotada, compõe todos os fatores e/ou qualidades que possam viabilizar a prática docente (GUIMARÃES FILHO e BRANDEMBERG, 2017).

Essas qualidades e/ou fatores serão extraídos de um texto histórico, o qual Brandemberg (2021), em sua concepção, balizada, define ser:

[...] **um documento** que, composto (impressão, pictografia, escrita) de formatos e materiais (argila, papiro, pergaminho, bambu, papel) variados em algum momento da história, **nos permite acessar** de maneira implícita e explícita **elementos do contexto de sua composição e da relevância de seu conteúdo** com vistas ao **entendimento do conhecimento matemático**, de sua produção, desenvolvimento e divulgação (BRANDEMBERG, 2021, p. 28, grifo nosso).

Tendo como base essa compreensão/definição de texto histórico, podemos acessar intencionalmente do texto, elementos de sua composição e de sua malha histórica que possam viabilizar noções de objetos matemáticos, que para nossos apontamentos serão os de cunho Aritméticos, os mesmos que compõe uma das unidades de conhecimento propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC)⁴,

⁴ “[...] documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica [...]” (BRASIL, 2018, p. 7).

Realização



Apoio





Abaetetuba – Pa 07 a 09 de dezembro de 2022

oportunizando atender as competências e habilidades exigidas por esse documento oficial, relacionados a Educação Básica.

Como um *overview* de nossas colocações, em acordo com Brandemberg (2021), temos a segurança de fazer nossos apontamentos, partindo da compreensão que as potencialidades a serem apresentadas são os fatores e/ou qualidades encontradas no texto histórico, a saber o *Liber Abaci*, que podem viabilizar, depois de passar por uma transposição (um tratamento) didática, o ensino de conteúdos aritméticos, seja em um contexto amplo (pedagógico) ou específico (didático) do ensino.

Vemos, dessa forma, a partir do conjunto de conceitos e ideias e das competências e habilidades do *Liber Abaci* para o contexto medieval, potencialidades emergentes para o ensino de conteúdos aritméticos, dos quais elencamos alguns: representações numéricas, sistema numérico decimal, algoritmos das quatro operações aritméticas, métodos de prova real, outras formas de multiplicação além da usual, operações com números racionais, frações comuns e compostas, proporcionalidade, séries de somas, algebrização de situações aritméticas.

Inferimos que o *Liber Abaci* com um tratamento adequado para sua linguagem e simbologia, não teria “problema” em auxiliar nas atividades didáticas da educação básica, que a partir de nossa leitura percebemos que é permeado tanto das competências quanto das habilidades que são exigidas pela BNCC, em seus mais variados exemplos.

Conclusão

A partir dos assuntos iniciais apresentados do *Liber Abaci*, somos clarificados do teor aritmético que o livro possui, não deixando dúvidas de seu conteúdo, o qual, vai sendo composto ao longo dos capítulos por outros métodos aritméticos, dentre os quais encontramos, fração comum, fração composta, verificação da divisão pela aritmética modular, frações egípcias, método de proporção, método de negociação entre outros.

Realização



Apoio





Abaetetuba – Pa 07 a 09 de dezembro de 2022

Assim, apontamos um êxito deste texto histórico a partir de uma visão mais ampla, da repercussão do livro nos anos posteriores, dos olhares diferenciados para o livro, da tamanha viabilidade do que foi proposto por Fibonacci em seu *Liber Abaci*. Afinal, fazemos o uso, de maneira comum, da maior parte de suas propostas, como as cifras indianas e o sistema numérico posicional decimal em nossas salas de aula. Logo, podemos considerar que é um livro potencialmente rico para nossos dias, e com o tratamento didático necessário, poderá atender as competências e habilidades das unidades de conhecimento, números e álgebra, propostos pela BNCC.

Referências

BRANDEMBERG, J. C. Sobre Textos Históricos e o Ensino de Conteúdos Matemáticos. *In Investigações Científicas Envolvendo a História da Matemática Sob o Olhar da Pluralidade*. Curitiba: CRV, 2021. 12 p.

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília, 2018.

GARBI, Gilberto. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3ª ed rev. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2007.

GUIMARÃES FILHO, J. S.; BRANDEMBERG, J. C. Um estudo do Liber Quadratorum (1225) e suas potencialidades para o ensino de Matemática. **REMATEC**/Ano 12/n. 26/set.-dez. 2017, p. 71 – 85.

LEONARDO PISANO. **Liber Abbaci**. Secundo la lezione del codice magliabrchiano, C. I, 2616, Badia Fiorentina, nº 73, Roma: 1857.

POTRO, Betsabé Caunedo. **La Aritmética Mercantil Castellana en la Edad Media: una breve aproximación**. Universidad Autónoma de Madri. LUL, vol. 30, 2007, 5 - 19.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMAT, 2015.

SIGLER, L. E. **Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern english of Leonardo Pisano's book of calculation**. New York: Ed. Springer, 2002.

Realização



Apoio

